

Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 4

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008

Besprechung am 16. Juni 2008

- (1) Berechnen Sie die simpliziale Homologie der reellen projektiven Ebene aus Aufgabe 2.3 mittels des Satzes von Mayer-Vietoris, indem Sie $\mathbb{RP}^2$ als Vereinigung eines Möbiusbandes und einer Kreisscheibe ansehen.
- (2) Sei K ein Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und C_+K und C_-K die Kegel über K mit Spitzen $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $-v$. Die *Einhängung* SK von K ist definiert als der Simplizialkomplex $SK = C_+K \cup C_-K$.
- (a) Ist K eine simpliziale n -Sphäre (also $|K| \approx S^n$), so ist SK eine simpliziale $(n+1)$ -Sphäre.
- (b) Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\tilde{H}_{p+1}(SK) \cong \tilde{H}_p(K).$$

- (3) Zu einer Gruppe G sei $C_p(G)$ die freie abelsche Gruppe mit Basis $\{[g_1 | \dots | g_p] : g_1, \dots, g_p \in G\}$ für $p \geq 0$ und $C_p(G) = 0$ sonst. ($C_0(G)$ hat das Element $[]$ als Basis.) Für $p > 0$ sei weiterhin $\partial_p : C_p(G) \rightarrow C_{p-1}(G)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \partial_p[g_1 | \dots | g_p] &= [g_2 | \dots | g_p] \\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_p] \\ &+ (-1)^p [g_1 | \dots | g_{p-1}]. \end{aligned}$$

- (a) Damit wird $C_*(G)$ zu einem Kettenkomplex. Dessen Homologie nennt man die *Gruppenhomologie* $H_*(G)$ von G .
- (b) Es gilt $H_0(G) = \mathbb{Z}$.
- (c) Die Gruppe $H_1(G)$ ist kanonisch isomorph zur abelsch gemachten Gruppe $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$, wobei die Kommutatoruntergruppe $[G, G] < G$ erzeugt wird von allen Kommutatoren $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.