Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 5

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008

Besprechung am 14. Juli 2008

(1) Sei X ein topologischer Raum.
  (a) Singuläre 1-Simplizes sind im wesentlichen das gleiche wie Wege in X (also stetige Abbildungen $I \to X$).
  (b) Seien γ_1, γ_2 Wege in X mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, γ_3 die Komposition von beiden, γ_4 der zu γ_1 inverse Weg und $\gamma_5 \colon I \to \{x\} \subset X$ ein konstanter Weg. Dann gilt in $S_*(X)$:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \sim \gamma_3, \qquad \gamma_1 \sim -\gamma_4, \qquad \gamma_5 \sim 0.$$

(2) Für einen Teilraum U eines Raumes X bezeichne $\iota_U^X \colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion.
  (a) Für jeden Raum X und jedes $[c] \in H_*(X)$ gibt es einen kompakten Teilraum $U \subset X$ derart, daß $[c]$ im Bild von $H_*(\iota_U^X)$ liegt
  (b) Sei $U \subset X$ kompakt, $[c] \in H_*(U)$ und $H_*(\iota_U^X)([c]) = 0$. Dann gibt es ein kompaktes $W \subset X$ mit $U \subset W$ und $H_*(\iota_U^W)([c]) = 0$

(3) (Fünfer-Lemma) Sei

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & C_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & C_5 \arrow[d, "f_5"] \\
D_1 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] & D_3 \arrow[r] & D_4 \arrow[r] & D_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Wenn f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen sind, dann auch f_3.