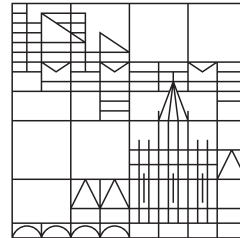


MATHEMATISCHE ASPEKTE DER MAGNETOHYDRODYNAMIK

Vorlesung von H. Freistühler im Wintersemester 2017/18

Mitgeschrieben und in \LaTeX gesetzt von
Marco Bernreuther und Simon Buchwald
Stand: 26. Oktober 2017;

Universität
Konstanz



Veröffentlichung und Weitergabe nur mit Zustimmung des Dozenten.
Über Rückmeldung zu Fehlern/Anregungen/Kritik würden wir uns freuen.

Marco Bernreuther (marco.bernreuther@uni-konstanz.de)
Simon Buchwald (simon.buchwald@uni-konstanz.de)

Inhaltsverzeichnis

1 Die Grundgleichungen der klassischen Magnetofluidynamik (MFD/MHD)	1
1.1 Ideale MHD	1
1.2 Dissipative MHD	2
1.3 Planares Subsystem	3
2 Einführung in die Theorie der Erhaltungsgleichungen	4
2.1 Hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen	4
2.2 Stabilität von Schockwellen	11
2.3 Fluidynamische Schockwellen	15
2.4 Zusammenhang zwischen der Möglichkeitenfunktion von Schockwellen und <u>echter Nichtlinearität</u> (im Sinne von Def 2.1.3(ii))	19
3 MHD-Schockwellen im \mathbb{R}^2 (isentrop)	20
3.1 Planare MHD-Schockwellen im \mathbb{R}^2	20

1 Die Grundgleichungen der klassischen Magnetofluiddynamik (MFD/MHD)

1.1 Ideale MHD

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}_x (\rho V^T) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \operatorname{div}_x (\rho V V^T + \Pi) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} B + \operatorname{div}_x (B V^T - V B^T) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \operatorname{div}_x (V^T (\mathcal{E} I + \Pi)) & = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \operatorname{div}_x B = 0$$

Gleichungen (1) beschreiben ein ionisiertes quasineutrales Fluid der Massendichte $\rho = \rho(x, t) > 0$ und Temperatur $\theta = \theta(x, t) > 0$, das sich unter dem Einfluss eines Magnetfeldes $B = B(x, t) \in \mathbb{R}^3$ mit der Geschwindigkeit $V = V(x, t) \in \mathbb{R}^3$ im \mathbb{R}^3 bewegt. Hierbei bezeichnen $x \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$ Ort und Zeit.

In (1) sind

$$(3) \quad \Pi = \left(p + \frac{1}{2} |B|^2 \right) I - B B^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

der Gesamtdrucktensord und

$$(4) \quad \mathcal{E} = \underbrace{\rho \left(\frac{1}{2} |V|^2 + e \right)}_{=\mathcal{E}_{fl}} + \underbrace{\frac{1}{2} |B|^2}_{=\mathcal{E}_{mag}}$$

die Gesamtenergiedichte. Dabei sind e und p die innere Energie und der fluiddynamische Druck.

$$\text{Schreibweise: etwa } B V^T = B \otimes V = \begin{pmatrix} V_1 B_1 & V_1 B_2 & V_1 B_3 \\ V_2 B_1 & V_2 B_2 & V_2 B_3 \\ V_3 B_1 & V_3 B_2 & V_3 B_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Für } M \in \mathbb{R}^{n \times 3} \text{ ist die Divergenz durch } \operatorname{div}_x M = \operatorname{div}_x \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} M_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} M_{nj} \end{pmatrix}$$

definiert. (Dies gilt nicht nur für quadratische Matrizen.)

Kurze Erläuterung der thermodynamischen Variablen ρ, θ, p, e : Diese Größen sind durch die sogenannte Zustandsgleichung des Fluids,

$$(5) \quad e = \epsilon(\tau, \sigma)$$

welche stets die (allgemeinen) Identitäten

$$(6) \quad p = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}, \quad \theta = \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma}$$

erfüllen muss, miteinander verknüpft. Dabei sind $\tau = \frac{1}{\rho}$ das spezifische Volumen und σ die sogenannte spezifische Entropie.

Außer (6) muss die Zustandsgleichung (5), also ϵ , gewissen weiteren allgemeinen Bedingungen genügen, insbesondere

$$(7) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} &> 0 \quad (\text{Druck ist positiv}) \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} &> 0 \quad (\text{Temperatur ist positiv}) \\ D^2 \epsilon &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \tau^2} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \tau \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma \partial \tau} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{“thermodynamische Stabilität”}) \end{aligned}$$

Wichtigstes Beispiel-Fluid “ideales Gas”:

$$\epsilon(\tau, \sigma) = c_V \tau^{1-\gamma} \exp\left(\frac{\sigma}{c_V}\right),$$

wobei $\gamma > 1$ (“adiabatischer Exponent”) und $c_V > 0$ (“spezifische Wärme bei konstantem Volumen”).

Es folgen

$$p = (\gamma - 1) c_V \rho \theta, \quad e = c_V \theta.$$

System (1) entsteht durch Kombination der Euler-Gleichungen der Fluidodynamik

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho V^T) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho V V^T + pI) &= F_L \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{fl}}{\partial t} + \operatorname{div}_x(V^T(\mathcal{E}_{fl} + p)) &= \Delta_{mag} \end{aligned}$$

mit den Maxwell-Gleichungen der E-Dynamik

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \times E \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \nabla \times B - J \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

(hier $E = E(x, t)$ elektrisches Feld, $J = J(x, t)$ Strom) anhand des Ohmschen Gesetzes

$$\eta J = E + V \times B$$

(η die elektrische Resistivität, hier $\eta = 0$) und des Lorentz Kraft-Gesetzes

$$F_L = J \times B.$$

Das Evolutionssystem (1) besteht aus acht partiellen Differentialgleichungen für die acht Zustandsgrößen V, B, ρ, θ als Funktionen von x und t . Das Anfangswertproblem ist wohlgestellt. Dabei ist die (nicht evolutionäre) Gleichung (2) eine Nebenbedingung, die mit (1) kompatibel ist im folgenden Sinne: jede Lösung von (1) zu Anfangsdaten (V, B, ρ, θ) ($t = 0$), die (2) erfüllen, erfüllt (2) auch zu jedem Zeitpunkt $t > 0$.

1.2 Dissipative MHD

Hier werden im Gegensatz zu 1.2 “Dissipationsmechanismen” berücksichtigt: Viskosität, Wärmeleitung und elektrische Resistivität.

$$(\tilde{1}) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}_x (\rho V^T) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \operatorname{div}_x (\rho V V^T + \Pi) & = \operatorname{div}_x (\mu \nabla V) + \operatorname{grad}^T ((\zeta - \mu) \operatorname{div}_x V^T) \\ \frac{\partial}{\partial t} B + \operatorname{div}_x (B V^T - V B^T) & = \operatorname{div}_x (\eta \nabla B) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \operatorname{div}_x (V^T (\mathcal{E} I + \Pi)) & = \operatorname{div}_x (\kappa \nabla \theta) + \operatorname{div}_x (\mu V^T (\operatorname{grad} V + (\operatorname{grad} V)^T)) \\ & \quad + \operatorname{div}_x ((\zeta - 2\mu) V^T (\operatorname{div}_x V^T)) + \operatorname{div}_x (\eta B^T (\operatorname{grad} B - (\operatorname{grad} B)^T)) \end{cases}$$

$$(2) \quad \operatorname{div}_x B = 0$$

Die Koeffizienten

$\mu, \zeta > 0$: Viskosität

$\kappa > 0$: Wärmeleitung

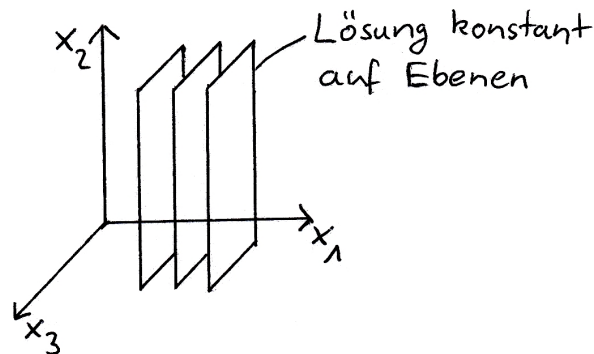
$\eta > 0$: Elektrische Resistivität

sind Funktionen von ρ und σ .

Für $(\tilde{1})$ gilt wie für (1): AWP ist wohlgestellt¹; Nebenbedingung (2) ist für alle $t > 0$ erfüllt, wenn sie für $t = 0$ erfüllt ist.

1.3 Planares Subsystem

Während bisher $x = (x_1, x_2, x_3)$ Punkte im \mathbb{R}^3 , betrachten wir hier Lösungen (V, B, ρ, θ) , die nur von x_1 und t abhängen.



Schreiben

$$\begin{aligned} V &= (v, w) = (V_1, (V_2, V_3)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ B &= (a, b) = (B_1, (B_2, B_3)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Wobei wir V_1 bzw. B_1 als Longitudinal- und (V_2, V_3) bzw. (B_2, B_3) als Transversalkomponente bezeichnen.

Hierbei reduziert sich die Nebenbedingung (2) auf

$$0 = \frac{\partial B_1}{\partial x_1}, \quad \text{also } a = \text{const},$$

also ab jetzt ein Parameter (nicht mehr Variable).

Die Gleichungen (1) werden zu ("planare Variante" der idealen MHD):

¹Kawashima 1983

$$(8) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v^2 + p + \frac{1}{2} |b|^2) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v w - ab) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} b + \frac{\partial}{\partial x_1} (vb - aw) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial x_1} ((\mathcal{E} + p + \frac{1}{2} (|b|^2 - a^2)) v - abw) & = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) werden zu ("planare Variante" der dissipativen MHD):

$$(\tilde{8}) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v^2 + p + \frac{1}{2} |b|^2) & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\zeta \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v w - ab) & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} b + \frac{\partial}{\partial x_1} (vb - aw) & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\eta \frac{\partial b}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial x_1} ((\mathcal{E} + p + \frac{1}{2} (|b|^2 - a^2)) v - abw) & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \zeta v \frac{\partial v}{\partial x_1} + \mu w \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \eta b \cdot \frac{\partial b}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$

2 Einführung in die Theorie der Erhaltungsgleichungen

2.1 Hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen

Satz 2.1.1

Die Gleichungen (8) der planaren idealen MHD sind ein hyperbolisches System von Erhaltungssätzen ("conservation laws").

Definition 2.1.2 ("Hyperbolisches System von Erhaltungssätzen")

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine differenzierbare Abbildung. Das System

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x_1} = 0$$

heißt ein "hyperbolisches System von Erhaltungssätzen" : \Leftrightarrow Für jedes $u \in U$ hat die Jacobi-Matrix $Df(u)$ von f ausschließlich reelle Eigenwerte $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_n(u)$ und zugehörigen Eigenvektoren $r_1(u), \dots, r_n(u)$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^n .

Interpretation: Bei jedem "Zustand" $u \in U$ kann das lineare System

$$(10) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad \text{mit } A = A(u)$$

diagonalisiert werden. Mit $R = (r_1(u), \dots, r_n(u))$ und $L = R^{-1} = \begin{pmatrix} l_1(u) \\ \vdots \\ l_n(u) \end{pmatrix}$ ist

$$LAR = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)).$$

Also mit $w = R\tilde{w}$ (d.h. $\tilde{w} = Lw$)

$$0 = \underbrace{LR}_{=I} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \underbrace{LAR}_{=\Lambda} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1}$$

d.h.

$$0 = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1}$$

oder auch

$$0 = \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_1}, \quad j = 1, \dots, n$$

(mit $\tilde{w}_j = l_j w$).

Allgemeine Lösung

$$\tilde{w}_j(x_1, t) = \phi_j(x_1 - \lambda_j t)$$

mit $\phi_j = \tilde{w}_j \Big|_{t=0}$.

Definition 2.1.3

Sei \tilde{U} offen, zusammenhängende Teilmenge von U . Ein Eigenwert $\lambda(u)$ von $Df(u)$ (auch charakteristische Geschwindigkeit) habe für $u \in \tilde{U}$ die Vielfachheit 1, sei $r(u)$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Dann heißt die "Mode" $(\lambda(u), r(u))$

(i) "linear entartet" in $\tilde{U} : \Leftrightarrow r(u)^T \nabla \lambda(u) = 0, \forall u \in \tilde{U}$

(ii) "echt nichtlinear" in $\tilde{U} : \Leftrightarrow r(u)^T \nabla \lambda(u) \neq 0 \forall u \in \tilde{U}$

Beispiele (mit $\tilde{U} = U = \mathbb{R}$):

(i) Die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ ist linear entartet, da $\lambda'(u) = 0$.

(ii) Die Erhaltungsgleichung ("Burgersgleichung")

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ist echt nichtlinear, da $\lambda'(u) = 1 \neq 0$.

Lösung einer skalaren Erhaltungsgleichung per Charakteristikenmethode.

Betrachte

$$(11) \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u))$$

bzw.

$$(12) \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(u) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

mit Anfangsdaten $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

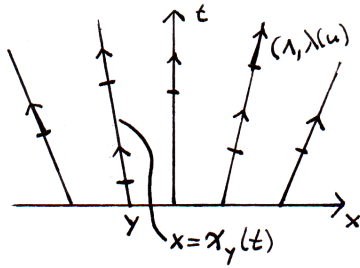
Im Spezialfall $\lambda = \text{const} = c$ gilt

$$u \text{ löst (11)} \quad \Leftrightarrow \quad u(x, t) = u_0(x - ct),$$

d.h. die Lösungen sind konstant längs aller Geraden $x = y + ct$ mit $y \in \mathbb{R}$.

Idee: Auch wenn λ nicht konstant ist, bedeutet (11): Am Punkt (x, t) verschwindet die Richtungsableitung der (gesuchten) Funktion u in Richtung des Vektors $(\lambda(u(x, t)), 1)$. M. a. W.: u ist konstant längs jeder Integralkurve dieses Vektorfeldes. Diese Integralkurven sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{d\chi(t)}{dt} = \lambda(u(\chi(t), t))$$



Zu jedem Anfangswert $\chi(0) = y \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung χ^y dieser DGL; jede dieser Kurven heißt "Charakteristik".

Tatsächlich besagt (11) nun genau, dass

$$(14) \quad \frac{d}{dt}(u(\chi(t), t)) = 0$$

für jede Charakteristik $\chi = \chi^y$. Daher sind die Charakteristiken die Geraden

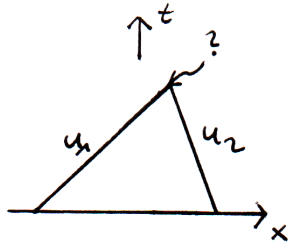
$$\chi^y(t) = y + t\lambda(u_0(y))$$

und ist der Wert der Lösung u auf jeder Charakteristik konstant, mit

$$u(\chi^y(t), t) = u_0(y).$$

Wir erhalten also die Lösung von (11) zu Daten u_0 , indem wir ausgehend von allen Punkten y der Anfangsgeraden die (geradlinigen) Charakteristiken antragen und längs ihrer jeweils die Daten konstant fortsetzen.

Problem dabei:



Im Allgemeinen können die Charakteristiken sich schneiden. Falls $u_0 \in C^1$ mit $\inf (\lambda \circ u_0)' > -\infty$, dann gibt es zwar ein $T > 0$, so dass die Charakteristiken sich für $0 < t < T$ nicht schneiden, und liefert die Charakteristikenmethode daher für diese t eine C^1 -Lösung. Existiert aber auch nur ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(\lambda \circ u_0)'(x_0) < 0$, dann gibt es nach einer endlichen Zeit keine Möglichkeit mehr, die C^1 -Lösung als solche fortzusetzen.

Daher erweitert man den Lösungsbegriff.

Definition 2.1.4

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty), U)$ heißt schwache Lösung des AWP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f(u))}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$$

\Leftrightarrow für jede Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gilt

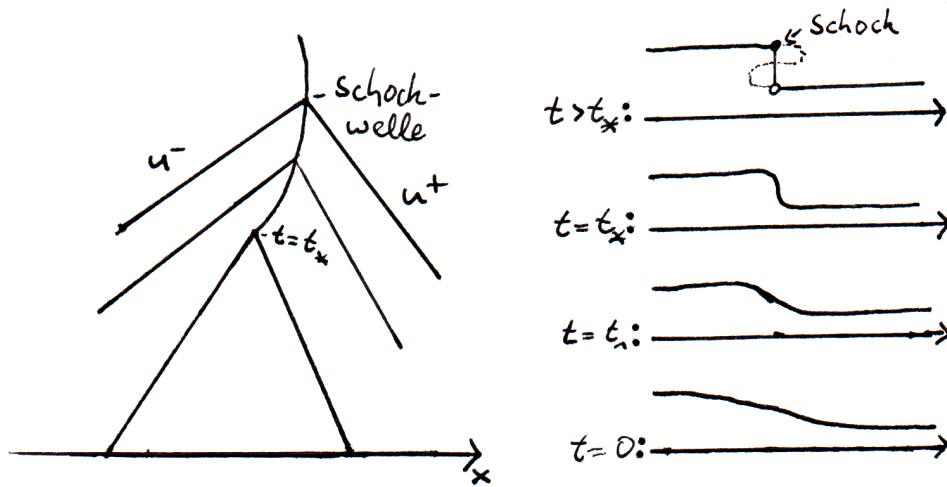
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \phi(x, 0) dx.$$

Erklärung: Diese Identität ist das, was man für eine klassische (C^1 -)Lösung des AWP bekommt, indem man es mit ϕ multipliziert, über die Halbebene $\{(x, t) | t > 0\}$ integriert und partielle Integration anwendet.

Bemerkung

- (1) Die Divergenzstruktur des AWP ist wesentlich für die Möglichkeit, schwache Lösungen zu betrachten.

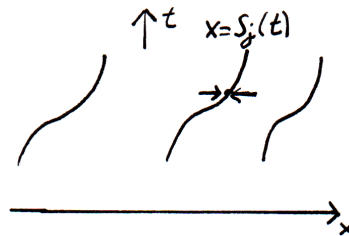
- (2) Im Unterschied zu anderen Teilgebieten der Theorie der partiellen Differentialgleichungen "bleibt" es bei schwachen Lösungen, d.h. man kann von ihnen nicht zeigen, dass sie in Wirklichkeit starke Lösungen (etwa C^1) sind; man kann es nicht nur nicht zeigen, sondern sie sind es auch nicht (im Allgemeinen).



Satz 2.1.5

Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R})$, tatsächlich C^1 außerhalb isolierter C^1 -Kurven $x = S_j(t)$, bei denen es jeweils einen links- und rechtsseitigen Grenzwert gibt, d.h., es existieren

$$u_j^\pm = u(S_j(t) \pm 0, t).$$



Dieses u ist genau dann schwache Lösung, wenn es

- (i) außerhalb der Kurven S_j klassische Lösung ist, d.h. $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$, und
- (ii) an jedem Punkt $(S_j(t), t)$ einer dieser Kurven für die dortigen links- und rechtsseitigen Grenzwerte die Beziehung

$$\underbrace{f(u_j^+(t)) - f(u_j^-(t))}_{\text{Diff. der Werte unter } f \text{ der Lsg. rechts und links}} = \underbrace{S_j'(t)}_{\text{Geschw. der Unstetigkeitswelle}} \underbrace{(u_j^+(t) - u_j^-(t))}_{\text{Diff. der Lösungswerte rechts und links}}$$

Bezeichnung:

Für $u^-, u^+ \in U$, $s \in \mathbb{R}$ wird die Relation

$$f(u^+) - f(u^-) = s(u^+ - u^-)$$

als Rankine-Hugoniot-Sprungbedingungen (RH) bezeichnet.

Beweis. Siehe Beweis des mehrdimensionalen Falls (Lemma 2.1.8). □

Definition 2.1.6

Der Begriff der schwachen Lösung funktioniert auch für Systeme von (n) Erhaltungsgleichungen in (d) Raumvariablen:

$u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty), \mathbb{R}^n)$ heißt schwache Lösung des AWP

$$(15) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x (F(u(x, t))) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ mit } u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

$:\Leftrightarrow \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + F(u(x, t)) \operatorname{grad}_x \phi(x, t) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \phi(x, 0) \, dx = 0.$$

Definition 2.1.7

Eine (ideale) Schockwelle in einer schwachen Lösung von (15) ist eine Hyperfläche $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, etwa gegeben vermöge einer C^1 -Funktion ψ durch $\psi(x, t) = 0$ mit $\operatorname{grad}_x \psi \neq 0$, so dass u in der Nähe von \mathcal{H} stückweise C^1 bis zum \mathcal{H} , d.h. es gibt C^1 -Funktionen u^-, u^+ auf $\{(x, t) : \psi(x, t) \geq 0\}$,

$$\text{mit denen } u(x, t) = \begin{cases} u^-(x, t), & \text{falls } \psi(x, t) < 0 \\ u^+(x, t), & \text{falls } \psi(x, t) > 0 \end{cases}.$$

Lemma 2.1.8

An jedem Punkt $p \in \mathcal{H}$ einer idealen Schockwelle gelten mit

$$s = -\frac{\psi_t}{|\operatorname{grad}_x \psi|}, \quad N = \frac{\operatorname{grad}_x \psi}{|\operatorname{grad}_x \psi|}$$

und

$$u^\pm(p) = \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow p \\ \psi(x, t) \gtrless 0}} u(x, t)$$

die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingungen

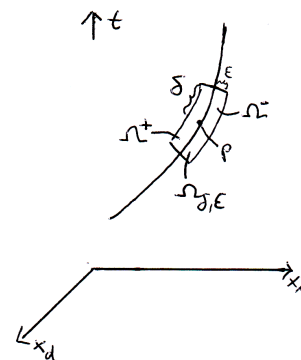
$$(F(u^+) - F(u^-)) N = s(u^+ - u^-).$$

Beweis.

Aus der Dgl

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x (F(u)) = \operatorname{Div}_{t,x} (u, F(u))$$

folgt für die im Schaubild definierte "Pill-box" $\Omega = \Omega_{\delta, \epsilon}$ der Länge 2δ und Breite 2ϵ mit dem Satz von Gauß



$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \operatorname{Div}_{t,x} (u, F(u)) \, dx dt \\
&= \int_{\Omega^-} \operatorname{Div}_{t,x} (u, F(u)) \, dx dt + \int_{\Omega^+} \operatorname{Div}_{t,x} (u, F(u)) \, dx dt \\
&= \int_{\partial\Omega^-} (u, F(u)) \cdot \begin{pmatrix} -s \\ N \end{pmatrix} \, dS + \int_{\partial\Omega^+} (u, F(u)) \cdot \begin{pmatrix} -s \\ N \end{pmatrix} \, dS \\
&= \int_{\partial\Omega} (u, F(u)) \cdot \begin{pmatrix} -s \\ N \end{pmatrix} \, dS.
\end{aligned}$$

Indem wir Länge und Breite der “Pill-box” gegen Null gehen lassen, folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{|\partial\Omega_{\delta,\epsilon}|} \int_{\partial\Omega_{\delta,\epsilon}} (u, F(u)) \cdot \begin{pmatrix} -s \\ N \end{pmatrix} \, dS \\
&= [(u, F(u))] \cdot \begin{pmatrix} -s \\ N \end{pmatrix} \\
&= -s (u^+ - u^-) + (F(u^+) - F(u^-)) N.
\end{aligned}$$

Da der Punkt um welchen wir die “Pill-box” betrachtet haben, beliebig war, ist die RH-Bedingung an jedem Punkt erfüllt. \square

Zurück nach 1D (eine Raumvariable)

Beispiel 2.1.9 (Beispiele unstetiger schwacher Lösungen)

Betrachten die Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0.$$

$$(i) \quad u_0(x) = \begin{cases} +1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Schwache Lösung } u(x, t) = \begin{cases} +1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Geschwindigkeit der Unstetigkeitswelle ist

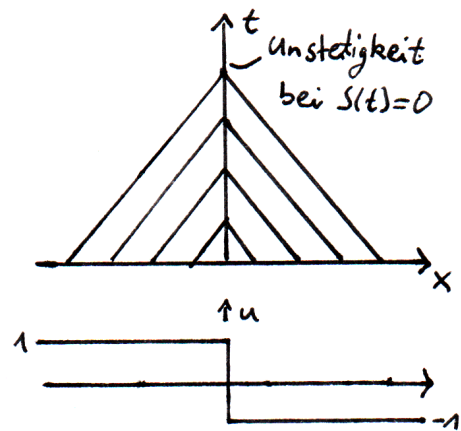
$$s = S'(t) = 0.$$

RH-Bedingungen:

$$\underbrace{f(u^+) - f(u^-)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{s}_{=0} \underbrace{(u^+ - u^-)}_{=2} = 0,$$

also erfüllt.

Heuristik: Die Charakteristiken laufen in die Unstetigkeitswelle hinein und enden dort; dort geht Information verloren. (“Irreversibler Vorgang”)



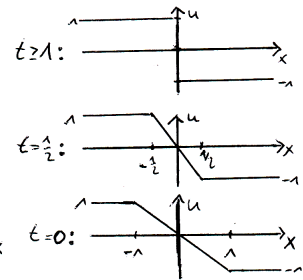
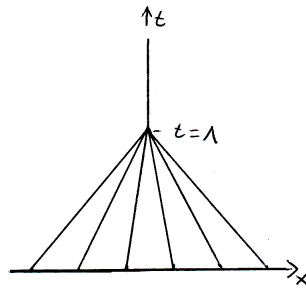
$$(ii) \quad u_0(x) = \begin{cases} +1, & x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Schwache Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & x \leq t-1 \\ \frac{x}{t-1}, & t-1 \leq x \leq 1-t \\ 1, & x \geq 1-t \end{cases} .$$

u ist klassische Lösung in

- $\{(x, t) : 0 \leq t < 1, x \leq t-1\}$,
- $\{(x, t) : 0 \leq t < 1, x \geq 1-t\}$,
- $\{(x, t) : 0 \leq t < 1, t-1 \leq x \leq 1-t\}$.



In den ersten beiden dieser drei Regionen, weil dort konstant, in der dritten, weil dort $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-x}{(t-1)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t-1}$, also $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{(t-1)^2} + \frac{x}{t-1} \frac{1}{t-1} = 0$.

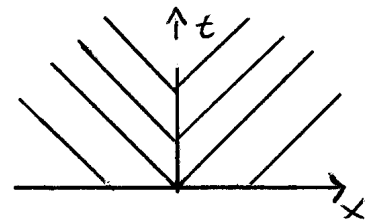
Da längs $x = S(t) = 0$, $t > 1$ die RH-Bedingungen wie in (i) gelten, ist u schwache Lösung.

$$(iii) u_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases} .$$

Schwache Lösung $u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases} .$

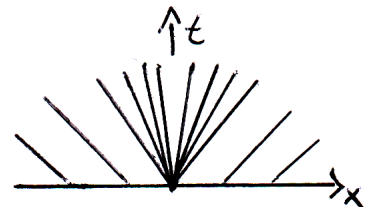
Heuristik: Die Charakteristiken kommen aus der Unstetigkeitswelle heraus; dort "entsteht" Information.

Tatsächlich gibt es überabzählbar viele schwache Lösungen!



Eine andere ist gegeben durch

$$u(x, t) = v(x, t) = \begin{cases} -1, & x \leq -t \\ \frac{x}{t}, & -t \leq x \leq t \\ 1, & x \geq t \end{cases} .$$



u ist klassische Lösung in

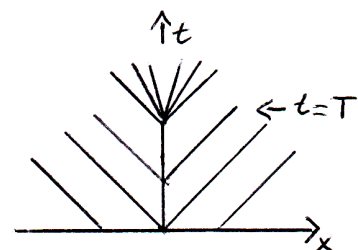
- $\{(x, t) : x \leq -t\}$
- $\{(x, t) : x \geq t\}$
- $\{(x, t) : -t \leq x \leq t\}$,

letzteres weil dort $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t}$, also $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t} \frac{1}{t} = 0$.

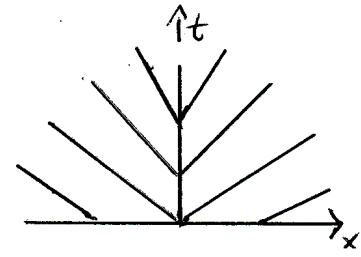
Weitere Lösungen:

Mit jedem $T > 0$ geht auch

$${}^T u(x, t) = \begin{cases} -1, & \text{falls } 0 \leq t \leq T \text{ und } x < 0 \\ +1, & \text{falls } 0 \leq t \leq T \text{ und } x > 0 \\ v(x, t-T), & \text{falls } t > T \end{cases} .$$



Noch weitere Lösungen:
 Durch Vorgabe von $u^+(t) = -u^-(t)$ mit
 $u^+ : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ monoton fallend mit $u^+(0) = 1$.

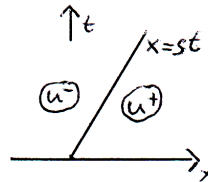


Erkenntnis (heuristischer Natur):
 (Zumindest für die Burgers-Gleichung):
 Nur die Schockwellen sind „gut“, in die Charakteristiken hineinlaufen.

2.2 Stabilität von Schockwellen

Betrachte prototypische Schockwelle

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x < st \\ u^+, & x > st \end{cases},$$



wobei (u^-, u^+, s) die RH-Bedingungen erfüllen.

Idee/Heuristik: Eine Schockwelle ist „gut“, wenn sie „Störungen aushält“.

Betrachte statt

$$(16) \quad u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0 \\ u^+, & x > 0 \end{cases},$$

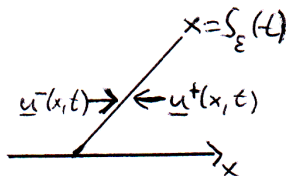
gestörte Anfangsdaten

$$(17) \quad u_0^\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon v_0(x)$$

wobei etwas $v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $v_0(0) = 0$.

Folgende Vorstellung „sollte“ stimmen:

Auch für $\epsilon > 0$ gibt es, zumindest für kleine $t > 0$ eine ähnlich beschaffene Lösung, nämlich mit einer Kurve $x = S_\epsilon(t)$, außerhalb der sie klassische Lösung ist und bei der sie RH-Bedingungen erfüllt.



Problem mit freiem Rand (free boundary problem)

Um diese Vorstellung zu prüfen, nehmen wir ihre Richtigkeit an und untersuchen ihre Linearisierung. Hierzu transformiert man zunächst auf mit bewegte Koordinaten

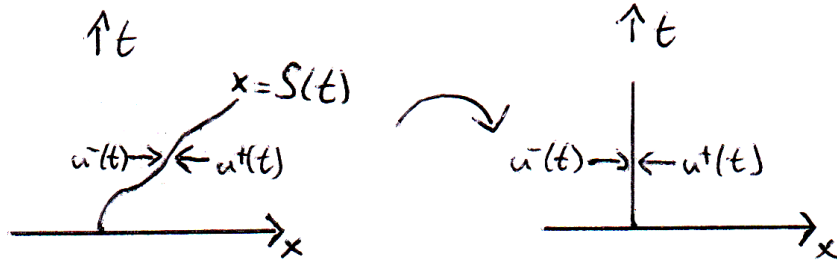
$$\tilde{x} = x - S(t), \quad \tilde{u}(\tilde{x}, t) = u(x, t).$$

Die so transformierte Lösung erfüllt

$$(18) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (f(\tilde{u}) - S'(t)\tilde{u}) = 0.$$

Dabei erhält man die Geschwindigkeit $S'(t)$, mit der die tatsächliche Position $S(t)$ der Unstetigkeitsfront sich bewegt, aus den RH-Bedingungen:

$$(19) \quad f(u^+(t)) - f(u^-(t)) = S'(t)(u^+(t) - u^-(t)).$$



Die Kombination (18), (19) ist eine vollwertige Umformulierung des freien Randwertproblems. Von dieser betrachtet man die Linearisierung.

Zu Anfangsdaten (17) gehöre eine Lösung

$$u^\epsilon(x, t) = u(x, t) + \epsilon v(x, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

mit Schockfront $S^\epsilon(t) = st + \epsilon \Sigma(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Dgl wird zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (u + \epsilon v) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} f(u + \epsilon v) - s(u + \epsilon v) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (A(u^\pm) - sI) \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \tilde{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Mit

$$u^\pm(t) = u^\pm + \epsilon v^\pm(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{d.h. } v^\pm(t) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0^\pm} \tilde{v}(x, t))$$

gilt RH-Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= -S'(t)(u^+(t) - u^-(t)) + f(u^+(t)) - f(u^-(t)) \\ &= \epsilon [-s(v^+(t) - v^-(t)) - \Sigma'(t)(u^+(t) - u^-(t)) + A(u^+)v^+(t) - A(u^-)v^-(t)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

⇒ Linearisiertes Schockfront-Problem:

$$(L) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (A(u^\pm) - sI) \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad x \geq 0, t > 0 \\ (A(u^\pm) - sI)v^+ - (A(u^-) - sI)v^-(t) &= \sigma(t)(u^+ - u^-), \quad t > 0 \end{aligned}}$$

mit $\sigma := \Sigma'$.

Wann ist dies eindeutig lösbar?

In (L) sind $v^-(t), v^+(t), \sigma(t)$ die gesuchten Größen, während u^-, u^+, s die (von Anfang an) gegebenen sind.

Lösung der Dgl

$$(20) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (A(u^\pm) - sI) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

durch Diagonalisieren anhand Basis $(r_1^\pm, \dots, r_n^\pm)$ aus linken/rechten Eigenvektoren von $A(u^\pm)$ und schreibe

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n v_j(x, t) r_j^\pm.$$

Das System (20) entkoppelt zu je n Gleichungen

$$\frac{\partial v_j(x, t)}{\partial t} + (\lambda_j^\pm - s) \frac{\partial v_j(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Wobei λ^\pm die Eigenwerte von $A(u^\pm)$ sind.

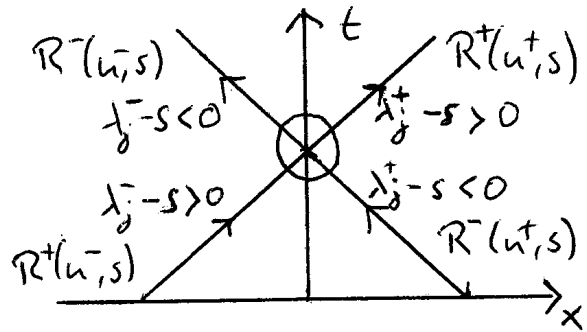
Die Lösung ist gegeben durch

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n v_{0,j} \left(x - (\lambda_j^\pm - s) t \right) r_j^\pm, \quad x \geq 0,$$

wobei diese Formeln so nur für

$$x - (\lambda_j^\pm - s) t \geq 0$$

gelten.



Auf diese Art und Weise sind die Komponenten von $v^+(t)$ und $v^-(t)$, die den Eigenvektoren r_j^\pm zu solchen j , für die $\lambda_j^+ - s > 0$ bzw. $\lambda_j^- - s < 0$ ist, entsprechen, durch die Anfangsdaten determiniert. Andererseits sind die jeweils anderen Komponenten frei, d.h. noch zu bestimmen. Mit Hilfe der Räume

$$R^\pm(u, s) = \sum_{\lambda \geq s} \ker(A(u) - \lambda I)$$

(= Raum der Amplitudenvektoren schneller bzw. langsamer als s laufender linearer Wellen) zerlegen wir v^- und v^+ als

$$\begin{aligned} v^- &= v_-^- + v_+^- \quad \text{mit } v_-^- \in R^-(u^-, s), v_+^- \in R^+(u^-, s). \\ v^+ &= v_-^+ + v_+^+ \quad \text{mit } v_-^+ \in R^-(u^+, s), v_+^+ \in R^+(u^+, s). \end{aligned}$$

Annahme: Unstetigkeitswelle ist nicht-charakteristisch, d.h. $\lambda_j(u^\pm) \neq s$ für $j = 1, \dots, n$.

Die linearisierten RH-Bedingungen lauten hiermit

$$(LA) \begin{cases} (A(u^+) - sI) v_+^+(t) - (A(u^-) - sI) v_-^-(t) - \sigma(t)(u^+ - u^-) \\ = - (A(u^+) - sI) v_-^+(t) + (A(u^-) - sI) v_+^-(t) \end{cases}$$

Die natürliche Bedingung an unsere Referenzlösung (u^-, u^+, s) besteht darin, dass das lineare Gleichungssystem (LA) zu beliebiger rechter Seite eine eindeutige Lösung $(v_+^+(t), v_-^-(t), \sigma(t))$ hat.

Dies wird charakterisiert durch die Bedingung

$$(LS) \quad \boxed{R^+(u^+, s) \oplus R^-(u^-, s) \oplus \mathbb{R}(u^+ - u^-) = \mathbb{R}^n}$$

der linearen Stabilität.

Notwendige Bedingung hierfür ist

$$(21) \quad \dim(R^+(u^+, s)) + \dim(R^-(u^-, s)) + 1 = n.$$

Die Eigenwerte von $A(u^-)$ seien

$$\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \dots \leq \lambda_j^- < s < \lambda_{j+1}^- \leq \dots \leq \lambda_n^-,$$

die von $A(u^+)$ seien

$$\lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_k^+ < s < \lambda_{k+1}^+ \leq \dots \leq \lambda_n^+,$$

mit $j = \dim(R^-(u^-, s))$ und $k = \dim(R^-(u^+, s))$. Wobei die Randfälle $j = 0$ bzw. $k = n$ möglich sind.

Dann ist die notwendige Bedingung (21) äquivalent zu

$$j + n - k + 1 = n$$

bzw.

$$j = k - 1,$$

d.h.

(LSU)	$\lambda_{k-1}^- < s < \lambda_k^-,$ $\lambda_k^+ < s < \lambda_{k+1}^+.$	Lax shock inequalities Laxsche Schock-Ungleichungen
-------	--	--

Mit anderen Worten:

Die Anzahl der auslaufenden Charakteristiken ist $n_{out} = (k - 1) + (n - k) = n - 1$.

Die Anzahl der einlaufenden Charakteristiken ist $n_{in} = k + (n - (k - 1)) = n + 1$.

Interpretation: Die linearisierten RH-Bedingungen, n linear-algebraische Gleichungen, geben in eindeutiger Weise die Amplituden der $n - 1$ auslaufenden Wellen und die Geschwindigkeit der Unstetigkeitswelle.

Definition 2.2.1

(i) Eine Schockwelle (u^-, u^+, s) heißt linear stabil $:\Leftrightarrow$ (LS) gilt.

(ii) Eine Schockwelle (u^-, u^+, s) erfüllt die Lax-Schock-Ungleichungen $:\Leftrightarrow$ (LSU) gilt.

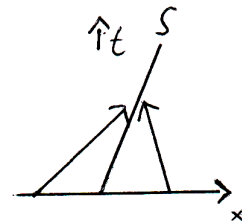
Die Bedingung (LS) ist äquivalent zu $\Delta = \det(r_1(u^-), \dots, r_{k-1}(u^-), u^+ - u^-, r_{k+1}(u^+), \dots, r_n(u^+)) \neq 0$, wobei Δ die Lopatinski-Determinante bezeichnet.

Einfachster Fall: $n = 1$

Die Bedingung (LSU) wird zu

$$\lambda(u^-) > s > \lambda(u^+),$$

d.h. Charakteristiken laufen beidseitig in die Unstetigkeitswelle hinein.



Bemerkung

(i) Die Bedingung der linearen Stabilität ist tatsächlich hinreichend für die Wohlgestelltheit des nichtlinearen Problems. (siehe Literatur)

(ii) Analoges gilt in mehreren Raumvariablen. (siehe späterer Abschnitt dieser Vorlesung). Für die nichtlineare Situation siehe Literatur (Majda 1983, Metivier 1989).

2.3 Fluiddynamische Schockwellen

Die Grundgleichungen der Fluiddynamik in einer Raumdimension sind

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_X &= 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_X &= 0 \\ \mathcal{E}_t + ((\mathcal{E} + p) v)_X &= 0\end{aligned}$$

bzw. im isentropen Fall (konstante Entropie, $\sigma = \text{const.}$)

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_X &= 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_X &= 0\end{aligned}$$

in der raumfesten Koordinate X .

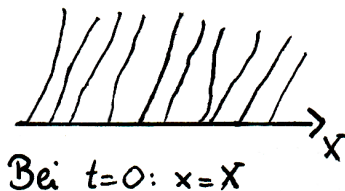
Alternativ

$$\begin{aligned}\tau_t - v_x &= 0 \\ v_t + p_x &= 0 \\ \left(\epsilon + \frac{1}{2}v^2\right)_t + (pv)_x &= 0\end{aligned}$$

bzw. im isentropen Fall

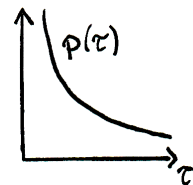
$$(22) \quad \begin{cases} \tau_t - v_x = 0 \\ v_t + (p(\tau))_x \end{cases} \quad \text{“p-System”}$$

in der teilchenfesten Koordinate. Die Transformation zwischen raumfester und teilchenfester Koordinate ist $X = X(x, t)$; Funktionen ρ, v, p , usw. werden in dem einen Bild als solche von X, t , in dem anderen als solche von x, t aufgefasst.



Ort an dem sich Teilchen x zur Zeit t befindet ist $X = X(x, t)$.

Hier betrachten wir die Gleichungen (22) in Teilkoordinaten im isentropen Fall. In (22) sind $\tau > 0$ das spezifische Volumen $\tau = \frac{1}{\rho}$, der Druck p eine gegebene Funktion $p = p(\tau)$ mit $p'(\tau) < 0$ und Geschwindigkeit v . Beispielsweise $p(\tau) = k\tau^{-\gamma}$ mit $\gamma > 1$.



Hyperbolizität, charakteristische Geschwindigkeiten:

(22) ist von der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} \tau \\ v \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} -v \\ p(\tau) \end{pmatrix},$$

also

$$A(u) = Df(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

Hat Eigenwerte

$$\lambda_{2/1} = \pm \sqrt{-p'(\tau)}$$

(ist also hyperbolisch) und zugehörige Eigenvektoren

$$r_{2/1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\sqrt{-p'(\tau)}$ die Schallgeschwindigkeit.

Schallwellen $\begin{pmatrix} \tau \\ v \end{pmatrix} = c(\xi) r_{\pm} e^{i\xi(x-\lambda_{\pm}t)}$, mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $c(\xi)$ Konstante sind spezielle Lösungen der Linearisierung von (22),

$$\text{“Akustik”} \begin{cases} \bar{\tau}_t - \bar{v}_x = 0 \\ \bar{v}_t + p'(\tau_*) \bar{\tau}_x = 0 \end{cases}$$

kurz

$$\bar{u}_t + A(u_*) \bar{u}_x = 0$$

am Referenzzustand

$$u_* = \begin{pmatrix} \tau_* \\ v_* \end{pmatrix}.$$

Schockwellen treten im nichtlinearen System (22) auf. Eine Schockwelle $(u^-, u^+, s) = ((\tau^-, v^-), (\tau^+, v^+), s)$ erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingungen

$$(23) \begin{cases} -s(\tau^+ - \tau^-) - (v^+ - v^-) = 0 \\ -s(v^+ - v^-) - (p(\tau^+) - p(\tau^-)) = 0. \end{cases}$$

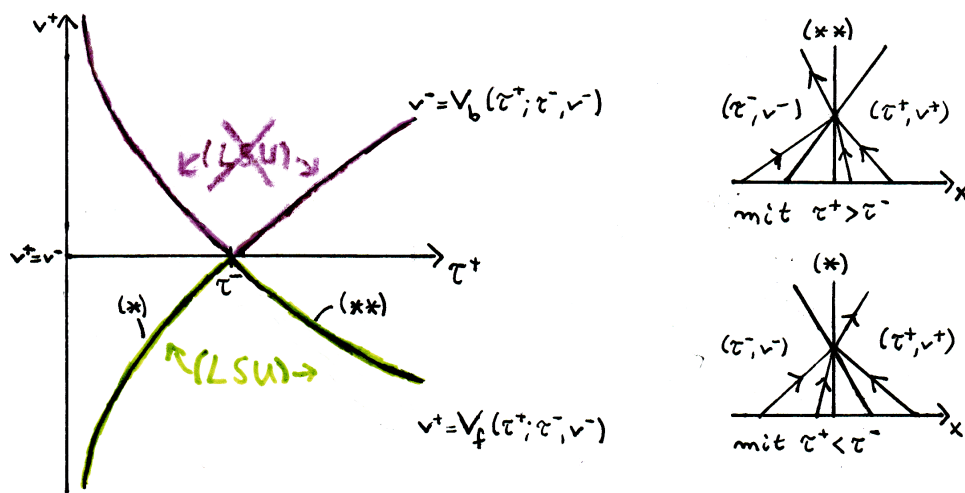
Satz 2.3.1

Zu gegebenem “linken” Zustand $(\tau^-, v^-) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ besteht die Menge aller “rechten” Zustände $(\tau^+, v^+) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, welche mit (τ^-, v^-) und einem geeigneten $s \in \mathbb{R}$ die RH-Bedingungen (23) erfüllen, aus den Graphen der zwei Funktionen

$$\begin{aligned} \tau^+ &\mapsto V_f(\tau^+; \tau^-, v^-) = v^- - \sigma(\tau^-, \tau^+) (\tau^+ - \tau^-), \\ \tau^+ &\mapsto V_b(\tau^+; \tau^-, v^-) = v^- + \sigma(\tau^-, \tau^+) (\tau^+ - \tau^-), \end{aligned}$$

mit $\sigma(\tau^-, \tau^+) = \sqrt{-\frac{p(\tau^+) - p(\tau^-)}{\tau^+ - \tau^-}}$.

Für $(\tau^+, v^+) \in \text{Graph } V_f(\cdot; \tau^-, v^-)$ ist $s > 0$; für $(\tau^+, v^+) \in \text{Graph } V_b(\cdot; \tau^-, v^-)$ ist $s < 0$. (Daher “f”, “b”: forward, backward.)



Längs Teilchenbahn wird das spezifische Volumen τ beim Kreuzen der Schockwellen größer (*) bzw. kleiner (**).

Beweis. Aus (23) folgt

$$0 = p(\tau^+) - p(\tau^-) + s^2(\tau^+ - \tau^-)$$

und damit

$$\pm s = \sqrt{-\frac{p(\tau^+) - p(\tau^-)}{\tau^+ - \tau^-}} =: \sigma(\tau^-, \tau^+).$$

Also ist (22) äquivalent zu

□

$$\begin{cases} s = \sigma(\tau^-, \tau^+) > 0 \text{ und } v^+ - v^- = -\sigma(\tau^-, \tau^+)(\tau^+ - \tau^-) \\ s = \sigma(\tau^-, \tau^+) < 0 \text{ und } v^+ - v^- = \sigma(\tau^-, \tau^+)(\tau^+ - \tau^-) \end{cases}$$

Frage: Welche dieser Schockwellen $((\tau^-, v^-), (\tau^+, v^+), \pm\sigma(\tau^-, \tau^+))$ sind stabil, d.h. erfüllen (LS), (LSU)?

Satz 2.3.2

(i) Für (τ^+, v^+) mit $v = V_f(\tau^+; \tau^-, v^-)$ ist $(s > 0)$ und zwar

$$\begin{aligned} \sqrt{-p'(\tau^-)} < s < \sqrt{-p'(\tau^+)}, & \text{ falls } \tau^+ < \tau^-, \\ \sqrt{-p'(\tau^+)} < s < \sqrt{-p'(\tau^-)}, & \text{ falls } \tau^+ > \tau^-, \end{aligned}$$

und $(LSU) \Leftrightarrow \tau^+ > \tau^-$.

(ii) Für (τ^-, v^-) mit $v = V_b(\tau^-; \tau^+, v^+)$ ist $(s < 0)$ und zwar

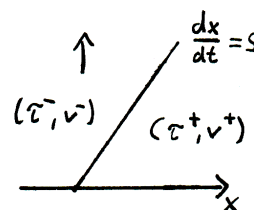
$$\begin{aligned} \sqrt{-p'(\tau^+)} < s < \sqrt{-p'(\tau^-)}, & \text{ falls } \tau^+ < \tau^-, \\ \sqrt{-p'(\tau^-)} < s < \sqrt{-p'(\tau^+)}, & \text{ falls } \tau^+ > \tau^-, \end{aligned}$$

und $c \Leftrightarrow \tau^+ < \tau^-$.

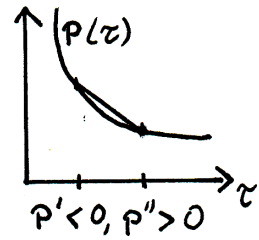
Beweis.

Wir kennen für jede Schockwelle $((\tau^-, v^-), (\tau^+, v^+))$ ihre Geschwindigkeit

$$s = \pm \sqrt{-\frac{p(\tau^+) - p(\tau^-)}{\tau^+ - \tau^-}}.$$



Der Wert von $-\frac{p(\tau^+) - p(\tau^-)}{\tau^+ - \tau^-}$ liegt wegen $p'' > 0$ strikt zwischen den Werten $-p'(\tau^-)$ und $-p'(\tau^+)$. Entsprechend liegt s strikt zwischen $\pm\sqrt{-p'(\tau^-)}$ und $\pm\sqrt{-p'(\tau^+)}$.

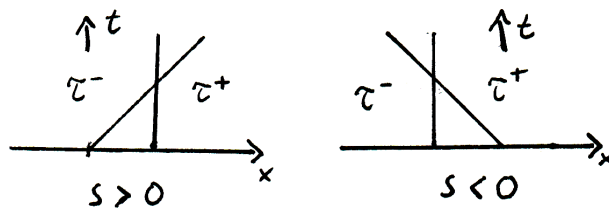


□

Korollar 2.3.3

Eine fluiddynamische Schockwelle erfüllt genau dann die (LSU), wenn τ längs der Teilchenbahn abnimmt. (physikalisch gesagt: Eine "vernünftige" Schockwelle komprimiert das Fluid.)

Beweis. Satz 2.3.2 zeigt, dass für vorwärts laufende Wellen (d.h. $s > 0$) die (LSU) genau dann gelten, wenn $\tau^+ > \tau^-$ und für rückwärts laufende Wellen (d.h. $s < 0$) genau dann, wenn $\tau^+ < \tau^-$.



□

Satz 2.3.4

Für die fluiddynamischen Gleichungen (22) gilt (LS) \Leftrightarrow (LSU)

Beweis. (LS) \Rightarrow (LSU) gilt immer. Gelte nun (LSU), dann ist die Bedingung (LS) in jedem Fall äquivalent zu

$$\Delta = \det(r, [u]) \neq 0,$$

wobei $[u] = u^+ - u^- = \begin{pmatrix} \tau^+ - \tau^- \\ v^+ - v^- \end{pmatrix}$ und ein (bestimmter) der Eigenvektoren $\gamma_{1/2}((\tau^\pm, v^\pm))$ ist, also

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \left\{ -\sqrt{-p'(\tau^-)}, +\sqrt{-p'(\tau^-)}, -\sqrt{-p'(\tau^+)}, +\sqrt{-p'(\tau^+)} \right\}.$$

Wegen $v^+ - v^- = -s(\tau^+ - \tau^-)$ ((RH)-Bedingung) ist $[u] = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -s \end{pmatrix}$ mit einem $\beta \neq 0$, also

$$\Delta = \beta \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & -s \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -s.$$

Letzteres kann wegen den (LSU) nicht gelten. □

Damit ist unsere Untersuchung der Stabilitätsbedingungen (LS), (LSU) für die isentrope Fluid-dynamik abgeschlossen. Aus Gründen der rechnerischen Vereinfachung haben wir sie in teilchenfesten ("Lagrange-")Koordinaten durchgeführt. Für die Formulierung in raumfesten ("Euler-")Koordinaten gelten ("natürlich") analoge Ergebnisse:

Satz 2.3.5

Betrachte die Euler-Gleichungen für die isentropen kompressiblen Fluide in 1 Raumvariablen,

$$(24) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + \hat{p}(\rho))_x = 0. \end{cases}$$

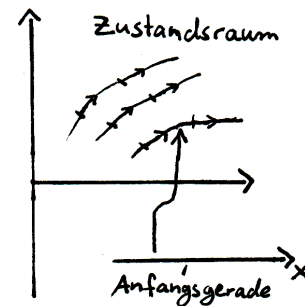
wobei $\hat{p}(\rho) = p(\frac{1}{\rho})$ mit p wie oben. In (24) gilt für jede Schockwelle: $(LS) \Leftrightarrow (LSU)$ und $\Leftrightarrow (\rho^+ - \rho^-)(v^\pm - s) > 0$

Beweis. (leicht) □

2.4 Zusammenhang zwischen der Möglichkeitenfunktion von Schockwellen und echter Nichtlinearität (im Sinne von Def 2.1.3(ii))

Mode (λ, r) ((EW, EV)-Paar von Df) ist gemäß 2.1.3(ii) echt nichtlinear bei einem Zustand u , wenn $(r \cdot \nabla \lambda)(u) \neq 0$.

Interpretation: Wähle Anfangsdaten $u_0(x)$, die ihre Werte auf einer Integralkurve R von r annehmen. Dann liegen die Werte der Lösung $u(x, t)$ von $u_t + f(u)_x = 0$ zu diesen Daten weiterhin auf R , zumindest für kleine $t > 0$ (Übung). Falls λ auf R konstant ist, haben alle Charakteristiken identische Geschwindigkeit. Falls λ auf R streng monoton verläuft, hängt es von den Anfangsdaten ab, ob die Charakteristiken voneinander weg oder aufeinander zu laufen. Deshalb sind für $(r \cdot \nabla \lambda)(u) \neq 0$ Schockwellen möglich.



Beispiel (Fluiddynamik)

$$\begin{aligned} r_{1/2} \cdot \nabla \lambda_{1/2} &= (1, \lambda_{2/1}) \cdot \left(\frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial \tau}, \underbrace{\frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial v}}_{=0} \right) \\ &= \frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial \tau} = \pm \frac{d(\sqrt{-p'(\tau)})}{d\tau} \\ &= \pm \frac{-p''(\tau)}{2 \underbrace{\sqrt{-p'(\tau)}}_{>0}} \neq 0, \end{aligned}$$

also echt nichtlinear.

Lemma 2.4.1

Falls $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow R$, wobei R Integralkurve zum EV einer echt nichtlinearen Mode und u_0, u'_0 beschränkt sind, dann ist, zumindest für kleine $t > 0$, eine klassische Lösung von

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f(u))}{\partial x} = 0$$

gegeben durch

$$u(x, t) = u_0(y), \quad y \text{ mit } x = y + t\lambda((u_0(y))),$$

wobei λ der (einfache) EW von Df sein soll, zu dessen zugehörigem EV die Integralkurve gehört.

Beweis. 1. Wohldef.:

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} (y + t\lambda(u_0(y))) = 1 + t(\lambda \circ u_0)'(y) > 0 \text{ für kleine } t$$

ist der Zusammenhang zwischen x und y umkehrbar; d.h. es gibt zu (x, t) eindeutiges $y = y(x, t)$.

2. Löst:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u'_0(y) \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial (f(u))}{\partial \lambda} &= \text{Df}(u_0(y)) u'_0(y) \frac{\partial y}{\partial x}\end{aligned}$$

Ableiten von $x = y(x, t) + t\lambda(u_0(y(x, t)))$ nach x bzw. t liefert

$$\begin{aligned}1 &= (1 + t(\lambda \circ u_0)'(y)) \frac{\partial y}{\partial x} \\ 0 &= (1 + t(\lambda \circ u_0)'(y)) \frac{\partial y}{\partial t} + \lambda(u_0(y)),\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda(u_0(y)) \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Zusammen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f(u))}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \underbrace{\left\{ (\text{Df}(u_0(y)) - \lambda(u_0(y))\text{I}) \underbrace{u'_0(y)}_{EV} \right\}}_{=0} = 0$$

□

Bemerkung

Für obige Lösungen sind $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \in \ker(\text{Df} - \lambda\text{I})$.

Definition 2.4.2

Jede Lösung mit dieser Eigenschaft heißt "simple wave".

In einer simple wave können die Charakteristiken aufeinander zulaufen (\rightarrow Schock-Bildung) oder nicht, je nach dem Monotonieverhalten von λ auf den Integralkurven R .

3 MHD-Schockwellen im \mathbb{R}^2 (isentrop)

3.1 Planare MHD-Schockwellen im \mathbb{R}^2

Wir benutzen $V = (v, w) \in \mathbb{R}^2$, $U = (\tau, b) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. In teilchenfesten ("Lagrange-") Koordinaten lauten die Gleichungen

$$\begin{cases} U_t - V_x = 0 \\ V_t - (\nabla e(U))_x = 0 \end{cases}$$

mit

$$\underbrace{e(U)}_{\text{Energie}} = \underbrace{\frac{b^2}{2\tau}}_{\text{magn.Energie}} - \underbrace{\int_1^\tau p(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}}_{\text{innere Energie}},$$

wobei p wie zuvor.

Ausgeschrieben ergibt sich

$$(25) \quad \boxed{\begin{array}{l} \tau_t - v_x = 0 \\ b_t - w_x = 0 \\ v_t + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b}{\tau} \right)^2 + p(\tau) \right)_x = 0 \\ w_t - \left(\frac{b}{\tau} \right)_x = 0 \end{array}}$$

$$Df(U, V) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline -D^2e(U) & 0 \end{array} \right) \text{ mit } D^2e(U) = \begin{pmatrix} \tau^{-3}b^2 - p'(\tau) & -\tau^{-2}b \\ -\tau^{-2}b & \tau^{-1} \end{pmatrix}.$$

Moden ...

Lemma 3.1.1

λ EW von $Df(U, V) : \Leftrightarrow \lambda^2$ EW von $D^2e(U)$. In diesem Falle gilt mit EV r von D^2e zu λ^2 :
 $\begin{pmatrix} r \\ -\lambda r \end{pmatrix}$ EV von $Df(U, V)$ zu EW λ .

Beweis. $\begin{pmatrix} r \\ \tilde{r} \end{pmatrix}$ EV von $Df(U, V)$ zu EW λ , d.h.:

$$\begin{aligned} (Df(U, V) - \lambda I_4) \begin{pmatrix} r \\ \tilde{r} \end{pmatrix} &= 0, \text{ d.h.:} \\ \begin{pmatrix} -\lambda I_2 & -I_2 \\ -D^2e & -\lambda I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \tilde{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \Leftrightarrow \tilde{r} &= -\lambda r \text{ und } (D^2e(U) - \lambda^2 I_2) r = 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.2

Die (automatisch reellen) Eigenwerte von D^2e sind positiv.
(Mit anderen Worten " $D^2e \succ 0$ ". Oder: "(25) hyperbolisch").

Beweis. $\det D^2e(U) = -\tau^{-1} \underbrace{p'(\tau)}_{<0} > 0$ und Diagonalelemente > 0 .

□

Bezeichnen wir die Eigenwerte mit μ_1, μ_2 , so dass $0 < \mu_1 \leq \mu_2$.

Lemma 3.1.3

(i) Für $b \neq 0$ ist immer $\mu_1 < \mu_2$.

(ii) Für $b = 0$ ist $\mu_1 = \min \{ \tau^{-1}, -p'(\tau) \}$, $\mu_2 = \max \{ \tau^{-1}, -p'(\tau) \}$.

Speziell für das " γ -Gesetz" $p(\tau) = k\tau^{-\gamma}$, $\gamma \geq 1$, gilt

$$\mu_1 = \begin{cases} \tau^{-1}, & \tau \leq \tau_* \\ -p'(\tau), & \tau \geq \tau_* \end{cases}, \quad \mu_2 = \begin{cases} -p'(\tau), & \tau \leq \tau_* \\ \tau^{-1}, & \tau \geq \tau_* \end{cases}$$

mit $\tau_* = \left(\frac{1}{k\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Beweis. (i) Wenn $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow D^2e(U)$ Vielfaches von I_2 .

(ii) Für $b = 0$ ist $D^2e(\tau, 0) = \begin{pmatrix} -p'(\tau) & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$.

□

Lemma 3.1.4

Wo λ^2 einfacher EW von D^2e , ist die Mode $\left(\lambda, \begin{pmatrix} r \\ -\lambda r \end{pmatrix} \right)$ von (25) genau dann echt nichtlinear im Sinne von Definition 2.1.3 (ii), wenn $(r^T \cdot \nabla) \lambda^2 \neq 0$.

[Sinn: Rechnung im 2-D statt 4-D-Raum]

Beweis. $\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial U} & \frac{\partial \lambda}{\partial V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ -\lambda r \end{pmatrix} = r \frac{\partial \lambda}{\partial U} = \frac{1}{2\lambda} r \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial U}. \quad \square$

Lemma 3.1.5

An allen Punkten $U = (\tau, b)$ mit $b \neq 0$ ist $r^T \cdot \nabla \lambda^2 \neq 0$.

Bemerkung

Zumindest für $b \neq 0$ sind die Moden echt nichtlinear.

Moden $\pm\sqrt{\mu_1}$, $\pm\sqrt{\mu_2}$ "langsame magnetoakustische", bzw. "schnelle magnetoakustische Mode".