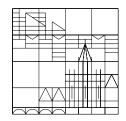
## Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory



# Algebraische Zahlentheorie Übungsblatt 4

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

#### Aufgabe 4.1

- (a) Wie viele  $\mathbb{Z}$ -Moduln der Mächtigkeit 180 gibt es?
- (b) Wie viele  $\mathbb{Z}[i]$ -Moduln der Mächtigkeit 45 gibt es?

#### Aufgabe 4.2

Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Wir bezeichnen mit  $\operatorname{End}(M)$  die abelsche Gruppe der R-Homomorphismen von M nach M. Die Addition in  $\operatorname{End}(M)$  ist durch

$$\phi + \psi : M \to M \; ; \; m \mapsto \phi(m) + \psi(m)$$

gegeben.

Seien R ein Hauptidealbereich und M ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul. Sei  $\mathcal P$  die endliche Menge der  $p\in R$  prim mit  $M[p^\infty]\neq 0$ . In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass

$$M = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} M[p^{\infty}].$$

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{End}(M) = \oplus_{p \in \mathcal{P}} \operatorname{End}(M[p^{\infty}]).$$

### Aufgabe 4.3

Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim.

- (a) Sei  $\phi_n: \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$  der eindeutig bestimmter  $\mathbb{Z}$ -Homomorphismus mit  $\phi_n(1) = p$ . Zeigen Sie, dass  $\phi_n$  injektiv ist.
- (b) Identifizieren Sie  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  mit der von p erzeugten Untergruppe von  $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ . Wir bezeichnen die aufsteigende Vereinigung der  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  unter dieser Identifizierung mit  $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$  nicht endlich erzeugt ist.
- (c) Zeigen Sie, dass, falls A,B Untermoduln von  $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}$  mit  $\mathbb{Z}_{p^{\infty}}=A\oplus B$  sind, so ist A=0 oder B=0.
- (d) Zeigen Sie, dass für jedes  $n\in\mathbb{N}$  und jedes  $x\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$  ein  $y\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$  mit x=ny existiert.

**Hinweis**: In teil (d) behandeln Sie zuerst den Fall n prim (unterscheiden Sie dabei n = p und  $n \neq p$ ).

#### Aufgabe 4.4

In Lineare Algebra I haben wir mit elementaren Zeilenumformungen über Körpern gearbeitet. Dies kann man über Ringen betrachten (man darf aber nur Zeilen mit Einheiten multiplizieren).

Sei R ein Ring. Sei  $A \in M_{m \times n}(R)$ . Wir sagen  $B \in M_{m \times n}(R)$  entsteht aus A durch elementare Zeilenumformung (bzw Spaltenumformung), falls man B aus A durch einer der folgenden Operationen erhält:

- i Vertauschen zweier Zeilen (bzw Spalten)
- ii Multiplikation einer Zeile (bzw Spalte) mit einer Einheit  $u \in R$
- iii Addition des c-fachen von Zeile (bzw Spalte) i zu Zeile (bzw Spalte) j wobei  $c \in R$  und  $i \neq j$

Zu einer Matrix  $A \in M_{m \times n}(R)$  definieren wir Span(A) als den Untermodul von  $R^n$  der von den Zeilen von A erzeugt wird.

(a) Seien  $A, B \in M_{m \times n}(R)$  und entstehe B durch eine elementare Zeilenumformung aus A. Zeigen Sie, dass

$$R^n/\mathsf{Span}(A) \cong R^n/\mathsf{Span}(B)$$

gilt.

(b) Seien  $A, B \in M_{m \times n}(R)$  und entstehe B durch eine elementare Spaltenumformung aus A. Zeigen Sie, dass

$$R^n/\mathsf{Span}(A) \cong R^n/\mathsf{Span}(B)$$

gilt.

(c) Sei G die Quotientengruppe

$$\mathbb{Z}^3/\mathsf{Span}\{(6,10,0),(6,0,15),(0,10,15)\}.$$

Beschreiben Sie die Struktur von G als Produkt von zyklischen Gruppen.

**Hinweis**: Reduzieren Sie die Matrix mit Zeilen (6, 10, 0), (6, 0, 15), (0, 10, 15) durch elementare Zeilenumformung und Spaltenumformung zu einer Diagonalmatrix.

Abgabe Dienstag, 21.05.2013 bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.