Algebraische Zahlentheorie

B4 SS 2012/2013

- Kuhlmann -

10. Vorlesung am 23.05.2013.

Proposition 1 (Transitivität von Ganzheit).

Seien $A \subset B \subset C$ Integritätsbereiche

Aus B ganz über A und C ganz über B

folgt C ganz über A.

Für den Beweis brauchen wir

Lemma 1 Seien $A \subset B \subset C$ Ringerweiterungen.

Aus B endl erzeugt als A-Modul und
C endl erzeugt als B-Modul folgt

C endl erzeugt als A-Modul.

Beweis. Seien $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ Erzeugend für B als A-Modul und
$\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ " " C als B-Modul

dann ist $\{\beta_i \gamma_j \; ; \; i, j\}$ erzeugend für C als
A-Modul. $\boxtimes$

Lemma 2. Sei $B = A[\beta_1, \dots, \beta_m]$ eine Ringerweiterung, mit β_i ganz über A, $\forall i = 1, \dots, m$.

Dann ist B ganz über A und B ist endl. erzeugt als A-Modul.

Beweis. Induktion nach m. Induktionsanfang $m = 1$:

Seien $\beta = \beta_1$ β ganz über A; $a_i \in A$

so daß $\beta^n + \dots + a_n = 0$.

Beh. $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}$ erzeugen $B = A[\beta]$ als A-Modul

Bew weil $\beta^n \in \sum_{i=0}^{n-1} A\beta^i$ kann man ein Element b aus $A[\beta]$

$$\circledast \quad b = c_0 + c_1\beta + \dots + c_N \beta^N \quad (c_i \in A)$$

umschreiben in dem man $c_N \beta^N$ als A-lineare Kombination der $\beta^0, \dots, \beta^{n-1}$ schreibt und in $\circledast$ ersetzt usw...

Induktionsschritt: Schreibe

$$B = A[\beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m] = \underbrace{A[\beta_1, \dots, \beta_{m-1}]}_{:= D}[\beta_m]$$

D endl. erz. als A-Modul per Induktionsannahme

und $B = D[\beta_m]$ ist endl. erz. als D Modul

per Induktionsanfang, da β_m a fortiori auch

ganz über D ist; also sind

$$A \subset D \subset B \quad \text{wie in Lemma 1}$$

und damit ist B endl. erz als A-Modul

und (Kor 3 9. Vor) damit B ganz über A. ☐

<u>Beweis von Proposition 1.</u>

Seien $\gamma \in C$ und $b_i \in B$ so daß

$$\gamma^n + b_1 \gamma^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

Setze $B' := A[b_1, \dots, b_n]$.

Da b_i ganz über A sind ist B' endl. erzeugt als

A-Modul (Lemma 2).

Nun ist γ bereits ganz über B'

(Wahl der b_i), also ist $B'[\gamma]$ endl.-erz.

als B'-Modul, also (Lemma 1) ist

$B'[\gamma]$ endl. erz. als A-Modul.

Damit ist γ ganz über A. ■

<u>**Korollar 1**</u> sei $R \subset S$ Ringerweiterung.

Es ist: $\overline{R}^S$ ist ganzabg. in S.

<u>Beweis</u> Es ist: $R \subset \overline{R}^S \subset S$. Sei $\gamma \in S$

ganz über $\overline{R}^S$, also haben wir

$$R \underset{\text{ganz}}{\subset} \overline{R}^S \overset{\text{Lemma 2}}{\underset{\text{ganz}}{\subset}} \overline{R}^S[\gamma]$$

und damit

$$\underset{\text{Prop. 1}}{\Longrightarrow} \quad R \underset{\text{ganz}}{\subset} \overline{R}^S[\gamma].$$

Somit ist also $\gamma \in \overline{R}^S$. ■

Korollar 2. Sei $R \subseteq K$ $\quad K$ Körper

Dann ist $\overline{R}^K$ ganz abgeschloßen.

Beweis. $\overline{R}^K \subseteq \mathrm{Quot}(\overline{R}^K) \subseteq K$

und $\overline{R}^K$ ganz abgeschloßen in K (Kor 1)

also a fortiori ist

$\overline{R}^K$ ganz abgeschloßen (in der

Zwischenerweiterung) $\mathrm{Quot}(\overline{R}^K)$. $\blacksquare$

---

§ Zusammenfassung: Lokalisierung. (3. Vorlesung B III am 29.10.2012)

1. Sei R Integritätsbereich. $D \subseteq R$ ist multiplik. falls $1 \in D$ und $s, t \in D \Rightarrow st \in D$.

Sei 2. $D \subseteq R$ multiplikativ, $0 \notin D$
$\sim$ auf $R \times D$ wird folgend definiert
$(r,d) \sim (r',d') \Leftrightarrow rd' = dr'$
schreibe $\frac{r}{d} := [(r,d)]$.

3. $\{\frac{r}{d} \mid (r,d) \in R \times D\} := D^{-1}R$ ist ein Ring (siehe 3. Vor B III).

Bsp 1 $D := R \setminus \{0\}$ ist multiplikativ und

$$D^{-1}R = \mathrm{Quot}(R).$$

Bsp 2. $\wp \triangleleft R$ Primideal $\Rightarrow D := R \setminus \wp$ ist multiplikativ. Wir bezeichnen in diesem Fall

mit $R_{\mathfrak{p}}$ die <u>Lokalisierung</u> $D^{-1}R$

von R nach $\mathfrak{p}$, also ist

$$R_{\mathfrak{p}} := \left\{ \frac{r}{d} \; ; \; r \in R, \; d \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

<u>Definition und Notation</u> (siehe Auf 3.3 der B III).

a) Für $I \trianglelefteq R$ und $D \subset R$ multiplikativ, $0 \notin D$

setze $I^e := D^{-1} R I$

das Ideal von I in $D^{-1}R$ erzeugt ist.

<u>üA</u>: $I^e = \{ a/d \mid a \in I, \; d \in D \} \trianglelefteq D^{-1} R$

b) Sei nun $I \trianglelefteq D^{-1} R$ setze

$$I^c := I \cap R \trianglelefteq R$$

Auf. 3.3 B 3 zeigt

(i) $I \trianglelefteq D^{-1} R \Rightarrow I^{ce} = I$

(ii) $\left. \begin{array}{l} I \trianglelefteq R \text{ prim und} \\ I \cap D = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow I^{ec} = I$

(iii) $\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}^e$ ist eine Inklusionserhaltende

Bijektion zwischen

$\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathfrak{p} \cap D = \emptyset \}$ und

$\mathrm{Spec}(D^{-1}R)$

wobei $\mathrm{Spec}(R) :=$ die Menge aller Primidealen von R.

Korollar 1. Sei $\mathfrak{p} \trianglelefteq R$ prim.

Die Abbildung

$$\mathfrak{q} \longmapsto \mathfrak{q} R_{\mathfrak{p}} \text{ liefert eine}$$

inklusionserhaltende Bijektion

$\{ \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) ; \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \} \longrightarrow$

$\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$

Insbesondere besitzt $R_{\mathfrak{p}}$ nur ein maximales

Ideal nämlich $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$.

Definition R ist lokal $\Leftrightarrow$ R besitzt
nur ein maximales Ideal

Lemma: R ist lokal $\Leftrightarrow$ $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal

siehe ÜB 6 B4 $\square$

Lokalisierung und Ganzheit

Aufgabe 5.3 B4:

R noethersch, $D \subseteq R$ multiplikativ ohne Null $\Rightarrow$ $D^{-1}R$ noethersch.

Satz R ganz abgeschlossen $\Rightarrow$

$D^{-1}R$ " "

Siehe ÜB 6 B4. $\square$

Koroller:

$R \subseteq R'$ ganze Ringerweiterung $\Rightarrow$

$D^{-1}R \subseteq D^{-1}R'$ ganze Ringerweiterung.

Siehe ÜB 6 B4. $\square$