~ Algebraische Zahlentheorie ~

Algebra B4.

– Kuhlmann –

11. Vorlesung am 27.05.2013.

§ Norm, Spur, Diskriminante.

Sei $L|K$ eine endl. Körpererweiterung.

Definition und Notation.

Sei $\alpha \in L$ und betrachte die Abbildung

$$\mu_{\alpha,L} : L \longrightarrow L$$
$$x \longmapsto \alpha x.$$

Es ist $\mu_{\alpha,L} \in \mathcal{L}_K(L,L)$ (ie ein lin. Operator).

Setze $\chi_{\alpha,L} :=$ Char Pol von $\mu_{\alpha,L}$

$f_{\alpha,L} :=$ Min Pol von $\mu_{\alpha,L}$

$N_{L|K}(\alpha) := \det(\mu_{\alpha,L}) \in K$

heißt die $(L|K)$ - Norm von α

$Sp_{L|K}(\alpha) := \mathrm{Spur}(\mu_{\alpha,L}) \in K$

die (L/K) – Spur von α.

Lemma 1.

(i) $f_{\alpha, L} = \text{Min Pol}_K(\alpha)$

[Insbesondere ist $f_\alpha := f_{\alpha, K(\alpha)} = \chi_{\alpha, K(\alpha)} = \text{Min Pol}_K \alpha$].

(~~weil~~ $\deg \chi_{\alpha, K(\alpha)} = [K(\alpha) : K] = \deg \text{Min Pol}_K(\alpha)$

$= \deg f_{\alpha, K(\alpha)}$, und damit sind sie gleich.)

(ii) $\chi_{\alpha, L} = f_{\alpha, L}^m$ wobei $m := [L : K(\alpha)]$

Beweis: (i) Es ist leicht zu prüfen daß

$$f(\mu_{\alpha, L}) = 0 \iff f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in K[x],$$

(die Aussage folgt nun unmittelbar von den Definitionen).

(ii) Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ eine Basis für $L/K(\alpha)$

so $L = \bigoplus_{i=1}^{m} K(\alpha)\lambda_i$ (*)

Setze $W_i := K(\alpha)\lambda_i$; die W_i sind (prüfe!)

$\mu_{\alpha, L}$-invariante K-Unterräume und

$L = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ als K-VR (**)

i.e. $\mu_{\alpha, L} : L \longrightarrow L$

$\mu_{\alpha, K(\alpha)} : K(\alpha) \longrightarrow K(\alpha)$

und $\quad K(\alpha) \xrightarrow[\sim]{\omega_i} W_i \quad$ als K-VR

$x \longmapsto x\lambda_i$

wobei ω_i die Eigenschaft hat:

$$\omega_i \circ \mu_{\alpha, K(\alpha)} = \mu_{\alpha, L} \circ \omega_i \quad \text{auf } K(\alpha)$$

i.e. $\mu_{\alpha, L} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mu_{\alpha, K(\alpha)}$

und $\underbrace{\mu_{\alpha, L}\restriction_{W_i} = \omega_i \circ (\mu_{\alpha, K(\alpha)}) \circ \omega_i^{-1}}_{\text{ähnliche lineare Transformationen}}$ } prüfe!

(**) liefert nun (LA I + II) daß:

$$\chi_{\alpha, L} = \mathrm{Char\,Pol}(\mu_{\alpha, L}) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Char\,Pol}\left(\mu_{\alpha, L}\restriction_{W_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Char\,Pol}\left(\omega_i \circ \mu_{\alpha, K(\alpha)} \circ \omega_i^{-1}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Char\,Pol}\left(\mu_{\alpha, K(\alpha)}\right) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\alpha, K(\alpha)} \overset{(i)}{=} \prod_{i=1}^{m} f_\alpha \quad \blacksquare$$

Lemma 2. Seien $\alpha, \beta \in L$ $\lambda \in K$

$[L:K] = n$. Es gelten

1. $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha) \; N_{L/K}(\beta)$

2. $Sp_{L/K}(\lambda\alpha + \beta) = \lambda \, Sp_{L/K}(\alpha) + Sp_{L/K}(\beta)$

3. $N_{L/K}(\lambda) = \lambda^n$, $Sp_{L/K}(\lambda) = n \cdot \lambda$

4. Sei $f_{\alpha, L} = x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_0$, $a_i \in K$

Setze $\mu := [L : K(\alpha)] = \frac{n}{\nu}$.

Es gelten:
(i) $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^n a_0^\mu$ und (ii) $Sp_{L/K}(\alpha) = -\mu \, a_{\nu-1}$

Beweis.

1. $\mu_{\alpha\beta, L} = \mu_{\alpha, L} \circ \mu_{\beta, L}$ und die

Determinante ist multiplikativ (LA II). ▫

2. $\mu_{\lambda\alpha + \beta, L} = \lambda \mu_{\alpha, L} + \mu_{\beta, L}$

und die Spur ist additiv (LA II). ▫

3. $N_{L/K}(\lambda) = \det(\mu_{\lambda, L}) = \det(\lambda \, Id_L)$
$= \lambda^n$ ▫

$\lambda \in K$

Analog

$Sp_{L/K}(\lambda) = Spur(\lambda \, Id_L) = n \cdot \lambda$ ∎

4. ⌈Erinnerung (LA I + II):

$A \in M_{n \times n}(K)$, setze

$\text{Char Pol } A = \det(x I - A) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$

Es ist $b_0 = (-1)^n \det A$ und $b_{n-1} = - Spur(A)$.⌋

(i)

$\nu = [K(\alpha) : K]$, $\mu = [L : K(\alpha)]$, $n = \nu \mu$

$N_{L/K}(\alpha) = \det(\mu_\alpha, L)$, und

$\chi_{\alpha, L} = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = (f_\alpha)^\mu \qquad (+)$

also $(-1)^n \det(\mu_\alpha, L) = b_0$ und Koeffizientenvergleich

in $(+)$ ergibt $b_0 = a_0^\mu$.

(ii) $b_{n-1} = - Sp_{L/K}(\mu_\alpha, L)$

Koeffizientenvergleich in $(+)$ ergibt: links ist

Koeffizient von x^{n-1} ist gleich Koeffizient von $x^{\nu\mu - 1}$

rechts, also ist gleich $\mu \, a_{\nu-1}$ (ÜA). ∎

<u>Proposition 3.</u> Sei $n = [L:K]$, $\beta \in L$

$f(x) = \text{Min Pol}_K \beta \qquad \deg f(x) := m = [K(\beta):K]$.

Seien $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ alle NS von $f(x)$.

Es ist
$$N_{L/K}(\beta) = \left(\prod \beta_i\right)^r$$
und
$$Sp_{L/K}(\beta) = r \sum \beta_i$$
wobei $r := \frac{n}{m} = [L : K(\beta)]$.

<u>Beweis</u> (Lemma 2 (i) und (ii) anwenden).

Sei $f_{\beta, L} = \text{Min Pol}_K \beta =$

$$x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 \qquad a_i \in K$$

Nun ist
$$\left.\begin{aligned} \prod \beta_i &= (-1)^m a_0 \text{ und} \\ \sum \beta_i &= -a_{m-1} \end{aligned}\right\} \text{Algebra } B\ \text{III}$$

Also ist
$$\left(\prod \beta_i\right)^r = (-1)^{mr} a_0^r \overset{(i)}{\underset{L2}{=}} N_{L/K}(\beta)$$

und
$$r \sum \beta_i = -r \cdot a_{m-1} \overset{(ii)}{\underset{L2}{=}} Sp_{L/K}(\beta). \qquad \blacksquare$$

Satz 4. Sei L/K separabel, $[L:K]=n$ und $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ die Menge der verschiedene K-Einbettungen von L [in der normalen Abschluß Ω ~~von~~ L/K].

Sei $\beta \in L$. Es ist

$$N_{L/K}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta) \quad \text{und}$$

$$Sp_{L/K}(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta)$$

Beweis: (Wir zeigen in der 12. Vorlesung daß $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ existieren).

Sei $f(x) := \text{Min Pol}_K \, \beta$; $[K(\beta):K] := m = \deg f$

und setze $r := [L:K(\beta)]$; und

$\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$ die verschiedene NS von $f(x)$

Behauptung: für $\forall i = 1, \dots, m$ gibt es genau r Einbettungen von L in Ω die β auf β_i absenden (d.h β_i erscheint genau r mal in

$\{\sigma_k(\beta)\}_k$) (Diese Behauptung wird auch in der <u>12. Vorlesung</u> bewiesen).

Nun folgt aus Prop 3 daß

$$N_{L/K}(\beta) = \left[\prod_{i=1}^{m} \beta_i\right]^r = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\beta) \quad \text{und}$$

$$Sp_{L/K}(\beta) = r\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\beta)$$