Algebraische Zahlentheorie

– Kuhlmann –

SS 2013

16. Vorlesung

am 17. 06. 2013

Kapitel 4 Dedekindringe

Definition 1. Ein Ring R ist Dedekindring $\Leftrightarrow$ R Integritätsbereich ist und jedes Ideal Produkt von Primidealen ist.

Notation: Erinnerung $I, J \trianglelefteq R$ dann ist
(Produkt von Idealen)

$$IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \; ; \; x_i \in I, \, y_i \in J, \, n \in \mathbb{N} \right\} \trianglelefteq R$$

Beispiele ① HIR ② R Dedekindring und $0 \notin S \subseteq R$ multiplikativ $\Rightarrow$ $S^{-1}R$ Dedekindring

③ Wir werden zeigen: Sei R Dedekindring und $K = \mathrm{Quot}(R)$, L/K endlich separabel, dann ist $\overline{R}^L$ Dedekindring

Definition 2.

(i) Sei R Integer und $K := \mathrm{Quot}(R)$.

Ein R-Untermodul $B \subseteq K$ heißt gebrochenes Ideal wenn es $\exists\, d \neq 0 \in R$ so daß $B \subseteq \frac{1}{d} R$.

(ii) Ideale in R sind auch gebrochene Ideale ($d = 1$), wir nennen sie ganze Ideale.

(iii) Sei $x = \frac{a}{b} \in K$ $\quad a, b \in R,\ b \neq 0$

dann ist $B := Rx$ ein gebrochenes Hauptideal.

Bemerkungen:

(i) B ist gebr. Ideal $\Leftrightarrow$ $\exists\, d \neq 0,\ d \in R$ und $A \trianglelefteq R$ so daß $B = \left(\frac{1}{d}\right) A$.

(ii) Die Idealoperationen $+, \cdot, \cap$ sind auf gebr. Ideale wohldefiniert:

$$B \subseteq \left(\frac{1}{d}\right) R,\quad B' \subseteq \left(\frac{1}{d'}\right) R \Rightarrow \begin{cases} B + B' \subseteq \left(\frac{1}{dd'}\right) R \\ BB' \subseteq (1/dd')\, R \\ B \cap B' \subseteq (1/d)\, R \end{cases}$$

genauer: $BB' = \left(\frac{1}{dd'}\right) IJ \qquad I, J \lhd R$

wobei $B = \left(\frac{1}{d}\right) I$ und $B' = \left(\frac{1}{d'}\right) J$.

<u>Definition 3</u> Das gebr. Ideal B ist <u>invertierbar</u> wenn es ein gebr. Ideal B' gibt mit $BB' = R$ (*)

<u>Bemerkung</u>: (i) B invertierbar $\Rightarrow \exists!\ B'$ das (*) erfüllt ($BB' = BB'' = R \Rightarrow B' = B''$).

Wir bezeichnen $B' := B^{-1}$.

(ii) Ein gebr. Hauptideal $\underset{x \in K}{B = xR}$ $x \neq 0$ ist invertierbar mit $B^{-1} = x^{-1} R$.

Notation seien B, B' gebr. Ideale

Setze $(B : B') := \{x \in K \mid xB' \subseteq B\}$

<u>Bemerkung</u> $(B : B')$ ist ein R-Modul.

Wenn $B' \neq \{0\}$ und $B \subseteq \frac{1}{d} R$ und $a \in B'$ ($d \neq 0$, $a \neq 0$), dann ist $(B : B') \subseteq \frac{1}{da} R$.

Lemma 1 Ist A invertierbares gebr. Ideal, dann gilt: $A^{-1} = (R:A)$

(also A invertierbar $\Leftrightarrow A.(R:A) = R$).

Beweis: Sei $AA' = R$ dann ist $A' \subseteq (R:A)$.

Andererseits ist $A.(R:A) \subseteq R$.

Es folgt:

$$(R:A) = A'A(R:A) \subseteq A'R = A'. \quad \blacksquare$$

Lemma 2 Ist jedes ganzes Ideal $\neq 0$ invertierbar, dann gilt: jedes $\neq 0$ gebr. Ideal invertierbar

Beweis Sei $B = \frac{1}{d} A$ gebr. Ideal, dann (mit $A \trianglelefteq R$, $d \in R$, $d \neq 0$) ist $B^{-1} = d\,A^{-1}$ $\blacksquare$

Lemma 3 Ein invertierbares gebr. Ideal ist endl. erz. R-Modul

Beweis: $AA^{-1} = R \Rightarrow \exists \{x_i\} \subseteq A$ und $\{x_i'\} \subseteq A^{-1}$ so daß $\sum x_i x_i' = 1$.

Es folgt: $x \in A \Rightarrow x = 1.x = \sum \underbrace{x x_i'}_{\in R} x_i$. $\blacksquare$

<u>Definition 4.</u> Die (multiplikative) Gruppe $\mathcal{J}$
und Notation

der invertierbaren ($\neq 0$) gebrochenen Idealen, geteilt durch die Untergruppe der gebr. Hauptidealen H, heißt die <u>Klassengruppe von R</u>.

Ihre Ordnung heißt die <u>Klassenzahl von R</u>

$$\left(\mathcal{K}\ell(R) = \mathcal{J}/H \quad ; \quad |\mathcal{K}\ell(R)| := h_R \right)$$

<u>Beispiel</u> Sei R HIR. Dann ist die Klassengruppe trivial und die Klassenzahl $= 1$.