Algebraische Zahlentheorie
SS 2013
– Kuhlmann –

---

20. Vorlesung am 01.07.2013

Sei Γ ein Gitter mit F.P T.

Lemma 1: $\forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists! \; l \in \Gamma$ so daß
$v \in T + l$

Beweis: sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis, schreibe
$v = \sum b_i e_i$ und setze $z_i := \lfloor b_i \rfloor \in \mathbb{Z}$,
$b_i \in \mathbb{R}$

dann ist $a_i := b_i - z_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_i < 1$.

Es ist $v = t + l$ wobei $t := \sum a_i e_i$ und
$t \in T$

$l := \sum z_i e_i$, $l \in \Gamma$. $\square$

Wir studieren nun die Faktorgruppe $(\mathbb{R}^n, +) / (\Gamma, +)$

Set $S := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

(eine multiplikative Untergruppe).

Lemma 2: $(n=1)$ $\quad (\mathbb{R}, +) / (\mathbb{Z}, +) \cong (S, \times)$

Beweis:
Betrachte $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S$
$\varphi(a) := e^{2\pi i a}$ $\square$

Allgemeiner setze $\mathbb{T}^n := \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n \text{ mal}}$

(n-dimensionaler Torus).

Satz 1: Sei Γ vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^n$; dann ist $\mathbb{R}^n / \Gamma \simeq \mathbb{T}^n$

Beweis: Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Basis (für Γ);

und betrachte $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ definiert durch

$$\varphi\left(\sum a_i e_i\right) = \left(e^{2\pi i a_1}, \ldots, e^{2\pi i a_n}\right). \quad \square$$

Lemma 3: $\varphi|_T : T \longrightarrow \mathbb{T}^n$ ist injektiv.

Beweis: Aus

$\exp(2\pi i a_j) = \exp(2\pi i b_j)$

(für $0 \leq a_j < 1$
$0 \leq b_j < 1$)

folgt $a_j = b_j$. $\square$

Allgemeiner gilt

Satz 2: Sei $\Gamma \leq \mathbb{R}^n$ be m-dimensional (also $m \leq n$), dann ist

$$\mathbb{R}^n / \Gamma \simeq \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

Beweis: Sei $V := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ und $W \leq \mathbb{R}^n$

so daß $\mathbb{R}^n = V \oplus W$; dann ist

$$\mathbb{R}^m = V \oplus W \underset{\text{Satz 1}}{\cong} \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \quad \blacksquare$$

Definition 1. (i) Sei $X \leq \mathbb{R}^n$ Lebesgue meßbar

definiere $v(X) := \int_X dx_1 \dots dx_n$, das Volumen von X

(Lebesgue maß von X).

(ii) Sei $\Gamma \leq \mathbb{R}^n$ vollst. Gitter

(so $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{R}^n / \Gamma$) und $X \leq \mathbb{T}^n$.

Definiere das Volumen von X:

$$v(X) := v(\varphi^{-1}(X))$$

Bemerkung (iii): Ist $Y \subseteq T$ so ist $\varphi(Y) \subseteq \mathbb{T}^n$ und $v(\varphi(Y)) = v(Y)$.

Satz 3. Sei $X \leq \mathbb{R}^n$ beschränkt so daß $v(X)$ existiert (i.e. X beschränkt und Lebesgue meßbar).

Aus $v(\varphi(X)) \neq v(X)$ folgt φ / X ist nicht injektiv.

__Beweis__. Sei φ/X injektiv. Da X beschränkt ist $\exists\ l_1, \ldots, l_s \in \Gamma$ so daß $l_j \neq l_i$ für $j \neq i$

und $X_{l_j} := X \cap (T + l_j) \neq \emptyset \quad \forall j = 1, \ldots, s$

$$\left(\text{so } X = \dot{\bigcup_{j=1}^{s}} X_{l_j} \right).$$

Für $j = 1, \ldots, s$ definiere

$$Y_{l_j} = X_{l_j} - l_j$$

so daß $Y_{l_j} \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Bemerke daß die Y_{l_j} disjunkt sind (da φ/X injektiv ist). Außerdem gelten:

ⓐ $\nu(Y_{l_j}) = \nu(X_{l_j})$ (weil das Lebesgue Maß invariant ist unter Translation)

ⓑ $\varphi(X_{l_j}) = \varphi(Y_{l_j})$ (weil $\Gamma = \ker \varphi$)

ⓒ $\nu(\varphi(Y_{l_j})) = \nu(Y_{l_j})$ [da $Y_{l_j} \subset T$; siehe Bemerkung iii)].

Wir berechnen nun:

$$v(\varphi(X)) = v\left(\varphi\left(\bigcup_j X_{l_j}\right)\right) = v\left(\dot{\bigcup_j} Y_{l_j}\right)$$

$$= \sum_j v(Y_{l_j}) = \sum v(X_{l_j}) = v(X). \qquad \square$$

Definition 2.

(i) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex wenn $\forall\, x, y \in X$ and $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt:

$\lambda x + (1-\lambda) y \in X$

(ii) X ist symmetrisch wenn gilt:

$x \in X \Rightarrow -x \in X$

Satz 4 (Minkowski) Sei Γ vollst. Gitter in $\mathbb{R}^n$ mit F. P. T und sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ bounded symmetrisch Konvex (und Lebesgue meßbar). Wenn $v(X) > 2^n v(T)$ dann $\exists\ \gamma \neq 0 \quad \gamma \in \Gamma \cap X$.

Bemerkung: Da Γ diskret ist, gibt es nur endlich viele solche γ's.

Beweis. Betrachte daß Gitter 2Γ mit F. P. $2T$ und Volumen $v(2T) = 2^n v(T)$.

Betrachte das Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\Gamma$

berechne $\nu(\mathbb{T}^n) = \nu(2T) = 2^n \nu(T)$

$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n \qquad \ker \varphi = 2\Gamma$

$\varphi(X) \subseteq \mathbb{T}^n$ und

$\nu(\varphi(X)) \leq \nu(\mathbb{T}^n) = 2^n \nu(T) < \nu(X)$

Aus Satz 3 folgt: φ / X ist nicht injektiv.

Also $\exists\, x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$ s.d.

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ oder $(x_1 - x_2) \in \ker \varphi$ i.e

$x_1 - x_2 \in 2\Gamma$. Also $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \in \Gamma$.

Nun $x_2 \in X \Rightarrow -x_2 \in X$ und $\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2}(-x_2) \in X$

i.e $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \in X$. $\blacksquare$

§ Geometrische Darstellung von Alg. Zahlen.

<u>Ansatz & Ziel</u>: Sei $L/\mathbb{Q}$ Zahlkörper von Grad n.
Wir wissen daß $L = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_L)$ (Satz 4 9. Vor).
Wir wollen den gebrochenen Ideale von L
Gittern in $\mathbb{R}^n$ zuordnen.

Sei θ ein Primitives Element so daß $L = \mathbb{Q}(\theta)$
(θ alg. Zahl) und seien

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die n verschiedene Einbettungen

von L in $\Omega := \mathbb{C}$.

Ist $\sigma_j(L) \subseteq L$ (also $\sigma_i(\theta) \in \mathbb{R}$) so heißt σ_j reell.

Sonst heißt σ_j komplex (also ist auch $\overline{\sigma_j}$ komplex).

Es ist $n = s + 2t$ wobei

$s := \#$ reelle Einbettungen und
$2t := \#$ komplexe "

[also $\sigma_1, \dots, \sigma_s$; $\sigma_{s+1}, \overline{\sigma_{s+1}}, \dots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma_{s+t}}$

sind alle n verschiedene Einbettungen].
setze $L_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t$.

[Siehe Fortsetzung folgt in der **22.** Vorlesung am 08.07.2013. (Seite 5)]