Algebraische Zahlentheorie
SS 2013
– Kuhlmann –

24. Vorlesung am 15.07.2013.

§ VII Die Einheitsgruppe $\mathcal{O}_L^\times$

Ansatz wie in der 22. und 23. Vorlesungen.

Ziel: Satz (Dirichletsche Einheitensatz) (D.E.S).
$\mathcal{O}_L^\times$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit freien Rang $s+t-1$.

Beweis: später. siehe 24. und 25. Vorlesungen.

Bemerkungen: Aus D.E.S können wir folgern daß:

(i) $\mathcal{O}_L^\times = F \times (\mathcal{O}_L^\times)_{tor}$

F freie abelsche Gruppe vom Rang $s+t-1$ (Siehe 5. Vor. S. 5)

(ii) $\mu(L) := (\mathcal{O}_L^\times)_{tor} = \{x \neq 0;\, x \in \mathcal{O}_L,\ \exists \mu \in \mathbb{N} : x^\mu = 1\}$

besteht aus Einheitswurzel in $\mathcal{O}_L^\times$, d.h

$\mu(L) :=$ die Gruppe der Einheitswurzel in L.

(iii) $\mathcal{O}_L^\times$ endl. erz $\Rightarrow (\mathcal{O}_L^\times)_{tor}$ endl. erzeugt,

also $(\mathcal{O}_L^\times)_{tor}$ ist eine endliche Gruppe

(eine endlich erzeugte Torsion abelsche Gruppe).

Andererseits ist eine endliche Untergruppe von $L^\times$ zyklisch (B3 Vorlesung), insbesondere ist $(\mathcal{O}_L^\times)_{tor}$ eine endliche zyklische Gruppe, mit Erzeuger eine Einheitswurzel $\mu \in L^\times$.

— || —

Für den Beweis von D. E. S. brauchen wir zwei Schlüßel Ergebnisse.

Lemma 1. Sei $\alpha \in L$. Dann ist
$\alpha \in \mathcal{O}_L^\times \iff \alpha \in \mathcal{O}_L$ und
$N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$.

Beweis: "$\Rightarrow$" $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times \Rightarrow \beta = \alpha^{-1} \in \mathcal{O}_L$

$$\Rightarrow N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha\beta) = \underbrace{N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{N_{L/\mathbb{Q}}(\beta)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$$

$$\Rightarrow N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1.$$

"$\Leftarrow$" Es ist: $\prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha) = \alpha \prod_{i=2}^{n} \sigma_i(\alpha) = \pm 1$.

Also $\alpha^{-1} = \pm \prod_{i=2}^{n} \sigma_i(\alpha)$.

Also ist α^{-1} ganz über $\mathbb{Z}$, außerdem ist $\alpha^{-1} \in L$.

Also $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_L$. $\blacksquare$

Proposition 2. Seien $m, M \in \mathbb{N}$ fest. Es ist:

Die Menge der komplexen algebraischen Zahlen

$A_{m,M} = \{ \alpha \in O_{\mathbb{C}} \mid \deg \operatorname{MinPol}_{\mathbb{Z}} \alpha \leq m$ und

$|\alpha'| \leq M$ für alle konjugierte α' zu $\alpha \}$

ist endlich.

Beweis: α ist ganz über $\mathbb{Z}$. Es genügt zu zeigen:

es gibt nur endlich viele normierte irreduzible

Polynome $\in \mathbb{Z}[x]$ die als $\operatorname{MinPol}(\alpha)$ fungieren

können (für ~~solche~~ $\alpha \in A_{m,M}$)

Nun ist $\deg \operatorname{MinPol}_{\mathbb{Z}} \alpha \leq m$. Wir behaupten:

die Koeffiziente sind auch beschränkt,

i.e. $\exists M_m \in \mathbb{N}$ so daß alle Koeffiziente

im Absolutbetrag $< M_m$ sind.

In der Tat sind die Koeffiziente elementare

Symmetrische Funktionen in den NS

und die NS sind im Absolutbetrag $\leq M$

per Annahme. ⌈Genauer erklärt, sei e.g

$\mathrm{Min\,Pol}_{\mathbb{Z}}\,\alpha = z^m + z_{m-1}x^{m-1} + \ldots + z_0 \qquad z_i \in \mathbb{Z}$

mit NS $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Es ist

$$z_{m-1} = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Rightarrow |z_{m-1}| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq mM = \binom{m}{1} M^1$$

$$z_{m-2} = \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \Rightarrow |z_{m-2}| \leq \sum_{i<j} |\alpha_i \alpha_j| \leq \binom{m}{2} M^2$$

$\vdots$

$$z_{m-k} = (-1)^k \sum \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \Rightarrow$$

$$|z_{m-k}| \leq \sum |\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}| \leq \binom{m}{k} M^k .$$ ⌋

Da $\mathbb{Z}^m$ ein Gitter ist, und jedes normiertes irreduzibles Polynom $\in \mathbb{Z}[x]$ vom $\deg \leq m$ ein Vektor in $\mathbb{Z}^m$ ist (Vektor der Koeffizienten) ist der Durchschnitt mit der beschränkter Menge endlich wie behauptet. ∎

Korollar 1. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine ganze algebraische Zahl so daß $|\alpha'| = 1$ für alle α' zu α konjugiert (i.e $\forall \alpha'$ NS vom $\text{Min Pol}_{\mathbb{Z}} \alpha$).

Dann $\exists\, \mu \in \mathbb{N}$ so daß $\alpha^{\mu} = 1$

(i.e α ist Einheitswurzel).

Beweis. Sei $m := \deg \text{Min Pol}_{\mathbb{Q}} \alpha$

Bemerke daß $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\} \subseteq A_{m,1}$

also ist endlich, d.h $\exists\, l, k$ mit

$\alpha^{l} = \alpha^{k}$ oder $\alpha^{k-l} = 1$. $\blacksquare$

Wir können nun direkt zeigen daß:

Korollar 2. $\mu(L) = \left(\mathcal{O}_L^{\times}\right)_{tor}$ ist endlich.

(Vergleiche mit Bemerkungen (iii)).

Beweis: Setze $n = \deg L/\mathbb{Q}$, $N = 1$

$$\mu(L) \subseteq A_{n,1}. \quad \blacksquare$$

- Ansatz weiterhin wie in der 22. und 23. Vorlesung.

Für den Beweis von D.E.S brauchen wir außerdem noch eine "Hilfsabbildung"

$$\lambda : L^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}^{s+t}$$

$$\alpha \longmapsto \left(\log|\sigma_1(\alpha)|, \dots, \log|\sigma_s(\alpha)|, \log|\sigma_{s+1}(\alpha)|, \log|\sigma_{s+2}(\alpha)|, \dots, \log|\sigma_{s+t}(\alpha)| \right).$$

λ ist Homomorphismus (der multiplikative $L^\times$ auf die additive $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$).

Bemerke daß $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times \Rightarrow |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = 1$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{s} |\sigma_i(\alpha)| \prod_{j=1}^{t} |\sigma_{s+j}(\alpha)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \log|\sigma_i(\alpha)| + 2\sum_{j=1}^{t} \log|\sigma_{s+j}(\alpha)| = 0 \quad (*)$$

und umgekehrt auch: für $\alpha \in \mathcal{O}_L$

$(*) \Longrightarrow N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ und so $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times$.

i.e. $\forall \alpha \in \mathcal{O}_L$: $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times \Longleftrightarrow (*)$ gilt für α.

Betrachte die Untermenge von $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$:

$$H := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t \;\middle|\; \sum_{i=1}^{s} x_i + 2\sum_{j=1}^{t} x_{s+j} = 0 \right\}.$$

Eigentlich ist H ein Unterraum der Dimension $s+t-1$ (Lösungsraum von einem homogenen Gleichungssystem mit einer Gleichung und in $s+t$ Unbekannten). Mit dieser Notation gilt:

$$\mathcal{O}_L^\times = \{ \alpha \in \mathcal{O}_L \mid \lambda(\alpha) \in H \}.$$

Proposition 3: $\lambda(\mathcal{O}_L^\times)$ ist ein Gitter in $\mathbb{R}^{s+t}$.

Beweis: später. Siehe Seite 8 weiter unten.

Korollar 4. $\mathcal{O}_L^\times$ ist endl. erz. mit freiem

Rang $\leq s+t-1$

Beweis. $\lambda(\mathcal{O}_L^\times)$ ist ein Gitter $\subseteq H$

also ist $\lambda(\mathcal{O}_L^\times)$ eine freie abelsche Gruppe

vom Rang $\leq s+t-1$. Betrachte

$$\lambda|_{\mathcal{O}_L^\times} : \mathcal{O}_L^\times \longrightarrow H$$ und berechne

dessen Kernel:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \ker \lambda &\Leftrightarrow \log|\sigma_\ell(\alpha)| = 0 \quad \forall\, \ell = 1, \dots, s+t \\
&\Leftrightarrow |\sigma_\ell(\alpha)| = 1 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\
&\Leftrightarrow |\alpha'| = 1 \text{ für alle konjugierte } \alpha' \text{ zu } \alpha \\
&\Leftrightarrow \alpha \text{ Einheitswurzel ist} \Leftrightarrow \alpha \in \mu(L).
\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt: $\ker \lambda = \mu(L)$ (Kor 1 + Kor 2), eine endliche Gruppe. Zusammenfassend:

$$\lambda : \mathcal{O}_L^\times \twoheadrightarrow \lambda(\mathcal{O}_L^\times)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{O}_L^\times / \underbrace{\mu(L)}_{\text{endl.}} \simeq \underbrace{\lambda(\mathcal{O}_L^\times)}_{\text{endl. erz.}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{O}_L^\times \text{ endl. erz. abelsche Gruppe.}$$

Ferner ist $\mu(L) = (\mathcal{O}_L^\times)_{tor}$ und der freie Rang von $\mathcal{O}_L^\times$ ist dann $=$

$$\dim_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{O}_L^\times / (\mathcal{O}_L^\times)_{tor} \right) = \dim_{\mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{O}_L^\times)$$

$$\leq s+t-1. \quad \blacksquare$$

<u>Bemerkung</u>: Um D.E.S vollständig zu beweisen müssen wir nur noch beweisen daß $\lambda(\mathcal{O}_L^\times)$ ein **vollständiges** Gitter in H ist !

<u>Beweis von Proposition 3</u>: z.z: $\lambda(\mathcal{O}_L^\times)$ ist diskret. Dafür genügt es z.z. daß

$\forall\, C \in \mathbb{R}_+ \quad \exists < \infty \quad \alpha \in \mathcal{O}_L^\times$ mit

$$|\log|\sigma_\ell(\alpha)|| \leq C \qquad \forall\, \ell = 1, \ldots, s+t .$$

Aber $\log|\sigma_\ell(\alpha)| \leq C \Leftrightarrow |\sigma_\ell(\alpha)| \leq \exp C$.

Also $\alpha \in \mathcal{O}_L^\times$ mit $|\log|\sigma_\ell(\alpha)|| \leq C \Rightarrow$

$$\alpha \in \underbrace{A_{n, \lceil \exp C \rceil}}_{\text{endlich wegen Prop. 2}} \qquad \blacksquare$$