Algebraische Zahlentheorie
B IV SS 2013
- Kuhlmann -

4. Vorlesung am 25.04.2013.

Lemma 1. Sei M R-Modul, $N, V \leq M$ Untermoduln. Es sind äquivalent:

Beweis: ÜA.

(1) $M = N \oplus V$

(2) $M = N + V$ und $N \cap V = \{0\}$

(3) jedes $x \in M$ läßt sich eindeutig schreiben als $x = y + z$ mit $y \in N$, $z \in V$. ∎

Beispiel. $G = \mathbb{Z}_4$ $H = \langle 2 \rangle$ hat kein Komplement im $\mathbb{Z}$-Modul G, weil die einzigen Untermoduln von G $\{0\}$, H und G sind. ∎

Definition 1. (i) Sei $S \subseteq M$. Eine *lineare Kombination* aus S Elemente ist $x \in M$; $x = \underbrace{\sum}_{\text{endliche Summe}} r_i x_i$, $\underbrace{r_i \in R}_{\text{Koeffiziente}}$, $x_i \in S$

Notation, Bemerk: (ii) $\operatorname{span}_R S := \{ x \mid x \text{ lin. Komb. aus } S \}$

$$= \sum_{s \in S} Rs$$

Lemma 2. Sei $N \leq M$. Es gelten:

(1) M endl. erzeugt $\Rightarrow$ M/N endl. erzeugt

Beweis: ÜA.

(2) N und M/N endl. erz. $\Rightarrow$ M endl. erz. ∎

Definition 3. $S \subseteq M$ ist linear unabhängig wenn

$$\sum r_i x_i = 0 \Rightarrow r_i = 0 \quad \forall i$$

$r_i \in R$, $x_i \in S$ endl. Summe

Definition 4. (i) $x \in M$ ist Torsionselement $\Leftrightarrow$ $\exists r \in R$ kein Nullteiler mit $rx = 0$

(ii) $M_{tor} := \{x \mid x \text{ Torsionel}\}$

ist ein Untermodule (vgl ÜB2);

der Torsionsmodul von M.

(iii) M ist torsionfrei $\Leftrightarrow$ $M_{tor} = \{0\}$.

Bemerkung: • $x \in M_{tor} \Rightarrow \{x\}$ ist nicht linear unab.

••

Definition 5. (i) $S \subseteq M$ ist eine Basis $\Leftrightarrow$ S erzeugt M und S ist lin. unab.

Konvention: $S = \emptyset$ ist l. unab ~~und~~ $\text{Span}\, \emptyset = \{0\}$

(ii) M ist frei wenn es eine Basis hat.

Bemk (i) S Basis $\Leftrightarrow$ jedes $x \in M$ eine eindeutige Darstellung als l. K aus S Elemente hat.

(ii) jeder K-Vektorraum hat eine Basis als ist frei als K-Modul, betrachte aber:

Beispiel: $G = \mathbb{Z}_2 = \langle 1 \rangle$ ~~ist~~ nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul weil $1 \in G_{tor}$.

Lemma 3. Sind äquivalent

Beweis: ü A

(1) M ist frei mit Basis S

(2) $M = \bigoplus_{x \in S} Rx$ ∎

Lemma 4 Sei $I \trianglelefteq R$, M R-Modul dann ist

(1) $IM := \{ \sum_{\text{endl. Summe}} r_j y_j \;/\; r_j \in I;\ y_j \in M \}$ ein Untermodul

(2) M/IM ist ein R/I-Modul.

Beweis ü A

$$R/I \times M/IM \longrightarrow M/IM$$
$$(\bar{r}, \bar{x}) \longmapsto \overline{rx}$$ ∎

Lemma 5. Sei M frei mit Basis $\{x_j\}_{j\in J}$ und $I \trianglelefteq R$. Dann ist $M/_{IM}$ frei als R/I - Modul mit Basis $\{\bar{x}_j\}_{j\in J}$

Beweis. $\{\bar{x}_j\}$ erzeugt M/IM ÜA.

Wir zeigen lin. unab über R/I.

~~Nun~~ $\sum_j \bar{r}_j \bar{x}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_j r_j x_j \in IM$

$\Leftrightarrow \sum_j r_j x_j = \sum_\ell t_\ell y_\ell$ für geeignete $t_\ell \in I$, $y_\ell \in M$

Nun $y_\ell = \sum_k r_{\ell k} x_k$ so wir schreiben $\sum_\ell t_\ell y_\ell$ um und bekommen $\sum r_j x_j = \sum_k s_k x_k$

nun mit $s_k \in I$.

Die Eindeutigkeit der Darstellung bezgl einer Basis impliziert nun $r_j \in I \ \forall j$ oder $\bar{r}_j = 0$ wie erwünscht. ∎

Korollar 6 Sei M ein R-Modul und S eine Basis mit $|S| = n \in \mathbb{N}$. Dann haben alle andere Basen Kardinalität n.

Beweis OE R ist kein Körper (sonst ist $R = K$ und M K-Vektorraum und $\dim_K M = n$ ist eindeutig).

Sei $I \underset{+}{\trianglelefteq} R$ maximal. Sei $S = \{x_j\}$;

dann ist $\{\bar{x}_j\}$ R/I - Basis für den

$K := R/I$ - Vektorraum M/IM

Wenn $\{y_k\}$ eine beliebige Basis von M ist;

dann ist ebenso $\{\bar{y}_k\}$ eine R/I - Basis

für den Vektorraum. ∎

Korollar 7 M endl. erzeugt und frei $\Rightarrow$ jede Basis ist endlich.

Beweis $\{x_j\}$ endl. und erzeugend

$\Rightarrow$ $\{\bar{x}_j\}$ erzeugend für M/IM als

R/I - Vektorraum (I maximales Ideal) also ist

M/IM endlich dimensional, und damit sind

notwendigerweise alle Basen von M endlich. $\boxminus$

<u>Bemerk.</u> Wir haben gezeigt:

M frei mit $\{x_j\}_{j\in J}$ Basis

dann ist $|J|$ eindeutig definiert.

<u>Definition 6</u> Sei M frei mit Basis $\{x_j\}_{j\in I}$.
<u>Notation</u>.

Definiere $\dim_R M := |J|$.

<u>Bemerk.</u> Wir haben gezeigt in Korollar 6:

$$\dim_R M = \dim_K V \qquad I \trianglelefteq R \text{ (Maximal)}$$

wobei $K = R/I$ und $V = M/IM$. $\boxminus$