Algebraische Zahlentheorie BIV

~ SS 2013 ~

~ Kuhlmann ~

– 5. Vorlesung am 29.04.2013 –

<u>Notation</u>: $R^n := \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_i \in R\}$

freier R-Modul (mit Komponentenweise Addition und skalarmultiplikation)

e.g Standard Basis $\{e_i \,;\, i = 1, \dots, n\}$.

<u>Lemma 1.</u> Sei M R-Modul. Es gilt:

M ist endl. erzeugt $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ und $K \leq R^n$ mit $M \simeq R^n/K$.

<u>Beweis</u>: "$\Leftarrow$" Lemma 2 4. Vor.

"$\Rightarrow$" Sei $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ erzeugend.

Betrachte $\varphi : R^n \longrightarrow M$

$$(r_1, \dots, r_n) \longmapsto \sum r_i x_i$$

surjektiver Homom. mit Kernel K. $\boxtimes$

Bemerkung 1 Sei M wie in Lemma 1: M endl erzeugt - $M \neq \{0\}$. $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugend.

Dann gilt:

M ist frei gdw $\ker \varphi = \{0\}$.
mit Basis $\{x_1, .., x_n\}$

[Insbesondere für $x \in M$, $x \neq 0$,

der Hauptmodul Rx ist frei mit Basis $\{x\}$
gdw $\{r \in R \,/\, rx = 0\} = \{0\}$]

Erinnerung:
$M_{tor} := \{x \in M \,/\, \exists\, r$ nicht Nullteiler; $rx = 0\}$

M ist torsionsfrei wenn $M_{tor} = \{0\}$
M ist Torsionsmodul wenn $M_{tor} = M$

Lemma 2. (a) M_{tor} ist Torsionsmodul und

(b) M / M_{tor} ist torsionsfrei

Beweis: (a) ÜA.
(b) Sei $\bar{x} \in M/_{M_{tor}}$ $\bar{x}$ Torsionselement.

So $\exists\, b \in R$ $b \neq 0$ (nicht Nullteiler) mit $b\bar{x} = 0$ i.e $bx \in M_{tor}$.

Also $\exists\, c \in R$, $c \neq 0$ (nicht Nullteiler) mit $cbx = 0$ so $x \in M_{tor}$

und $\bar{x} = 0$. $\square$

Bemerkung 2.

(i) M frei $\Rightarrow$ M torsionsfrei

Beweis: Sei $x \in M_{tor}$ und $\{x_i\}$ eine Basis.

Schreibe $x = \sum r_i x_i$ und sei $r \in R$ nicht Nullteiler so daß $rx = 0$.

Also ist $\sum (r r_i) x_i = 0$; $\{x_i\}$

l. u. $\Rightarrow$ $r r_i = 0 \ \forall i$ $\Rightarrow r_i = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0$. ∎

(ii) M torsionsfrei und $N \leq M \Rightarrow N$ torsionsfrei.

(iii) R Integritätsbereich $\Rightarrow$

$$M_{tor} = \{ x \in M \mid \exists\, r \in R, r \neq 0, rx = 0 \}$$

(iv) R Integritätsbereich, $x \notin M_{tor}$

$\Rightarrow$ Rx ist frei.

---

§ Moduln über Hauptidealbereiche

⊛ **Sei nun R stets ein Hauptidealbereich** ⊛

Satz 1. Sei F endlich erzeugt und frei, und $M \leq F$.
Dann ist M frei und
$\dim_R M \leq \dim_R F$
Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Beweis: Sei $\{x_i \,;\, i = 1, .., n\}$ eine Basis für F

Setze $M_m = M \cap \operatorname{span}_R \{x_1, \dots, x_m\}$

für $m \leq n$.

Wir zeigen per Induktion daß M_m frei ist mit $\dim_R M_m \leq 1$ (und damit ist auch geltend für $M_n = M$).

$M_1 = M \cap R x_1$, $x_1 \notin M_{tor}$ so $R x_1$ ist frei und therefore $R \xrightarrow{\sim} R x_1$, $r \longmapsto r x_1$

$M_1 \leq R x_1 \Rightarrow \varphi^{-1}(M_1) \trianglelefteq R \Rightarrow \varphi^{-1}(M_1) = \langle a_1 \rangle$

für $a_1 \in R$ und $M_1 = \varphi(\langle a_1 \rangle) = R(a_1 x_1)$.

Also ist M_1 frei mit $\dim_R M_1 \leq 1$.

Per Induktion nehmen wir nun an: M_m ist frei; $\dim M_m \leq m$.

Betrachte $\{ a \in R \mid \exists x \in M \text{ s.d. } x = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + a x_{m+1} \}$ ein Ideal in R (ÜA).

Sei $a_{m+1} \in R$ ein Erzeuger davon. Ist $a_{m+1} = 0$ so ist $M_{m+1} = M_m$ und unser Beweis ist fertig.

Sonst $a_{m+1} \neq 0$. Setze $\boxed{w := a_{m+1} x_{m+1} + v \in M_{m+1}}$ mit $v \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Sei $x \in M_{m+1}$; $\exists\, b_1, \dots, b_m,\ a \in R$ mit

$$x = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + a\, x_{m+1} \quad \text{also}$$

$$x = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + (c\, a_{m+1})\, x_{m+1}$$
$$= (b_1 x_1 + \dots + b_m x_m) + (c\, w - c v)$$

$\boxed{\text{So } x - cw = \sum b_i x_i - cv \in M_{m+1} \cap \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} = M_m}$

Wir haben gezeigt: $M_{m+1} = M_m + Rw$ mit

$w \neq 0$, $w \notin M_{tor}$; Rw frei mit Basis $\{w\}$.

Außerdem ist $M_m \cap Rw = \{0\}$ (üA); also

$M_{m+1} = M_m \oplus Rw$ und damit

direkte Summe von freien Moduln,

also M_{m+1} ist frei und

$$\dim_R M_{m+1} = \dim_R M_m + \dim_R Rw$$
$$\leq m + 1. \quad \blacksquare$$

Korollar 2. Sei M endlich erzeugt und $N \leq M \Rightarrow N$ endl. erzeugt.

Beweis. $M = R^n / K$ OE (per Lemma 1).

Betrachte $\pi : R^n \twoheadrightarrow R^n/K$, $y \longmapsto \bar{y}$ Projektionshom.

$$N \leq R^n/K \Rightarrow \pi^{-1}(N) \leq R^n;$$

Satz 1 $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(N)$ ist endlich erzeugt.

Lemma 2 4. Vor $\Rightarrow$ Nun $N = \pi^{-1}(N)/K$ ist auch endlich erzeugt. $\boxtimes$

Satz 3. M endl. erzeugt und torsionsfrei
$\Rightarrow$ M ist frei

Beweis. Sei $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq M$ erzeugend

und $\{v_1, \dots, v_n\}$ darunter maximal linear

unabhängig. Sei $y \in \{y_1, \dots, y_m\}$; dann Maximalität

$\Rightarrow$ $\exists\, a, b_1, \dots, b_n \in R$ nicht alle 0 so daß

$$a y + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = 0;$$

und $a \neq 0$ (weil $\{v_1, \dots, v_n\}$ l. unab.);

wir sehen also: $\forall j = 1, \dots, m$ $\exists\, a_j \in R$;

$a_j \neq 0$ und $a_j y_j \in \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$;

also $(a_1 \dots a_m) M \leq \underbrace{\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{frei}}$,

also (Satz 1) ist $(a_1 \dots a_m) M$ frei.

Nun $$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} (a_1 \cdots a_m) M \\ x &\longmapsto (a_1 \cdots a_m) x \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie weil $a_1 \cdots a_m \neq 0$ und

M torsionsfrei ist. Also ist M auch frei. ■

<u>Satz 4.</u> Ist M endlich erzeugt, so ist

$$M = M_{tor} \oplus F$$

wobei $F \leq M$ ein freier Untermodul

ist. Die Dimension $\dim_R(F)$ ist unabhängig

von der Wahl von F.

<u>Definition 1:</u> $\dim_R(F)$ in Satz 4 ist der <u>(freier) Rang von M.</u>

Für den Beweis vom Satz 4 brauchen wir ein

<u>Lemma 5.</u> Sei R kommutativ mit Eins, E und E' R-Moduln, E' frei.

Sei $f: E \to E'$ ein surjektiver Homomorphismus.

Dann existiert ~~ein~~ freie~~n~~ Untermodul $F \leq E$

so daß $f\restriction_F : F \to E'$ eine Isomorphie ist und $\quad E = F \oplus \ker f$.

Beweis sei $\{x_i'\}_{i \in I}$ Basis für E'; $\forall i \in I$ wähle $x_i \in E$ mit $f(x_i) = x_i'$ und setze $F := \operatorname{Span}_R \{x_i ; i \in I\}$.

Es ist leicht zu sehen, daß $\{x_i\}_{i \in I}$ linear unabhängig ist (ÜA) also ist F frei. Sei nun $x \in E$ und nehme $a_i \in R$ so daß $f(x) = \sum a_i x_i'$.

Also $f(x - \sum a_i x_i) = 0$ und damit $x - \sum a_i x_i \in \ker f$.

Wir haben gezeigt: $\quad E = F + \ker f$.

Nun ist es leicht zu sehen, daß $F \cap \ker f = \{0\}$ ÜA. $\blacksquare$