Algebraische Zahlentheorie

Algebra B IV

– Kuhlmann –

7. Vorlesung am 06.05.2013

Fortsetzung vom Beweis Lemma 3 6. Vorlesung

Sei nun y_i Vertreter von $\overline{y}_i$ mit gleicher Periode.

Wir zeigen: x_1, $y_1, \dots, y_m$ sind unabhängig.

Seien $a, a_1, \dots, a_m \in R$ mit

$$a x_1 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m = 0 \qquad (\dagger)$$

Dann ist $a_1 \overline{y}_1 + \dots + a_m \overline{y}_m = 0$,

also muss $a_i \overline{y_i} = 0 \quad \forall i$ sein.

Ist p^{r_i} die Periode von $\overline{y}_i$ dann gilt $p^{r_i} \mid a_i$,

p^{r_i} ist aber Periode für y_i $\Rightarrow$ $a_i y_i = 0 \quad \forall i$

und damit [zurück in $(\dagger)$] $a x_1 = 0$ auch. ∎

Wir wollen nun Satz 2 6. Vorlesung beweisen.

Beweis: $M[p^\infty]$ endl. erzeugt $\Rightarrow$ OE $M = M[p^\infty]$

und $\exists\, x_1 \in M$ mit Periode p^{ν_1}; $\nu_1 \in \mathbb{N}$

maximal so daß $M = M[p^{\nu_1}]$.

Betrachte $M[p]$; das $M[p]$ p-torsion

ist, ist die Skalar Multiplikation:

$$R/_{\langle p \rangle} \times M[p] \longrightarrow M[p]$$

$$(a + \langle p \rangle, x) \longmapsto ax$$

wohldefiniert ($\bar{a_1} = \bar{a} \Rightarrow (a - a_1) = p a_2$
$\Rightarrow (a_1 - a)\, x = a_2\, p x = 0$).

Also ist $M[p]$ ein $R/\langle p \rangle$ Vektorraum.

Analog ist für $\bar{M} := M/_{Rx_1}$

$\bar{M}[p]$ ein $R/_{\langle p \rangle}$ Vektorraum.

Beh. $\dim \bar{M}[p] < \dim M[p]$

als $R/\langle p \rangle$ Vektorräume

<u>Bew</u>: Seien $\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m$ linear unabh. in $\overline{M}[p]$,

Lemma 3 6. Vor liefert $y_i \in \overline{y}_i$ mit Periode p

s.d. $x_1, y_1, \dots, y_m$ unabh.

Setze $z_1 := p^{\nu_1 - 1} x_1$ dann hat z_1 Periode p,

$z_1 \in M[p]$ und $z_1, y_1, \dots, y_m \in M[p]$

sind immernoch unabhängig. $\square$ Beh.

Wir zeigen nun die $\exists^{Z}$ Aussage vom Satz 2.

Wir argumentieren per Induktion nach

$\dim_{R/\langle p \rangle}$ Vektorräume.

OE $\overline{M} \neq 0$ (sonst ist $M \simeq Rx_1 \simeq R/\langle p^{\nu_1} \rangle$ ✓).

IA $\Rightarrow$ $\overline{M} = \overline{M}[p^\infty] \simeq R\overline{x_2} \oplus \dots \oplus R\overline{x_s}$

mit Periode $\overline{x_i}$ ist p^{ν_i}

(d.h $R\overline{x}_i \simeq R / \langle p^{\nu_i} \rangle$

für $i = 2, \dots, s$) mit $\nu_2 \geq \dots \geq \nu_s \geq 1$.

Lemma 3 6. Vor $\Rightarrow$ $\exists\, x_2, \dots, x_s \in M$

x_i hat Periode p^{ν_i} für $i = 2, .., s$

und $x_1, x_2, \dots, x_s$ independent, i.e

$$M = M[p^\infty] \simeq Rx_1 \oplus \dots \oplus Rx_s$$

$$\simeq R/\langle p^{\nu_1}\rangle \oplus \dots \oplus R/\langle p^{\nu_s}\rangle$$

mit $\underset{\text{maximal}}{\nu_1} \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_s \geq 1$, wie behauptet.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit.

Sei $0 \neq M = M[p^\infty] \simeq R/_{\langle p^{\mu_1}\rangle} \oplus \dots \oplus R/_{\langle p^{\mu_s}\rangle}$ (*)

mit $\mu := \mu_s$ maximal und $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_s$,

i.e $M = M[p^\mu] \supsetneq M[p^{\mu-1}]$.

Beachte daß

$$M[p], \quad M[p^2]/_{M[p]}, \dots, \quad M[p^\mu]/_{M[p^{\mu-1}]}$$

alle $R/\langle p\rangle$ Vektorräume sind.

Aus (*) folgt ausserdem daß:

$$M[p] \simeq \langle p^{\mu_1 - 1}\rangle / \langle p^{\mu_1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle p^{\mu_s - 1}\rangle / \langle p^{\mu_s}\rangle$$

[weil $\left[R/\langle p^m\rangle\right][p] =$

$$\langle p^{m-1}\rangle / \langle p^m\rangle$$

und

$$(N \oplus K)[p] \simeq N[p] \oplus K[p]$$

ü A] ;

und $\dim_{R/\langle p\rangle} \langle p^{\mu_i - 1}\rangle / \langle p^{\mu_i}\rangle = 1$

[weil

$$R \longrightarrow \langle p^{m-1}\rangle / \langle p^m\rangle$$

$$x \longmapsto p^{m-1}x + \langle p^m\rangle$$

surjektiver Homomorphismus mit Kernel $\langle p\rangle$].

Also ist

$$\dim_{R/\langle p\rangle} M[p] = s = \#\{i \,;\, \mu_i \geq 1\}.$$

Schreibe nun

$$M[p^2] \simeq \bigoplus_{\mu_i = 1} R/\langle p\rangle \oplus \bigoplus_{\mu_i > 1} \langle p^{\mu_i - 2}\rangle / \langle p^{\mu_i}\rangle \quad (**)$$

Aus $(**)$ folgt

$$M[p^2]/M[p] \simeq \bigoplus_{\mu_i \geq 2} \left. \langle p^{\mu_i - 2}\rangle / \langle p^{\mu_i}\rangle \middle/ \langle p^{\mu_i - 1}\rangle / \langle p^{\mu_i}\rangle \right.$$

i.e.

$$M[p^2]/M[p] \simeq \bigoplus_{\mu_i \geq 2} \langle p^{\mu_i - 2}\rangle / \langle p^{\mu_i - 1}\rangle$$

[und $\langle p^{m-2}\rangle / \langle p^{m-1}\rangle \simeq R/\langle p\rangle$],

also ist

$$\dim_{R/\langle p\rangle} M[p^2]/M[p] = \#\{i \,;\, \mu_i \geq 2\}.$$

Allgemeiner berechnen wir

$$\dim_{R/\langle p\rangle} M[p^m]/M[p^{m-1}] = \#\{i \,;\, \mu_i \geq m\}$$

für $m = 1, 2, \ldots, \mu$.

Insbesondere:

$$\dim_{R/\langle p\rangle} M[p^{\mu}]/M[p^{\mu-1}] = \#\{i \,;\, \mu_i \geq \mu\} = \#\{i \,;\, \mu_i = \mu\}$$

§ Noethersche Moduln.

Sei R ein Ring, M ein R-Modul.

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent für M:

(1) jeder $N \leq M$ ist endlich erzeugt,

(2) jede aufsteigende Kette

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots$$

von Untermoduln wird stationär;

i.e. $\exists i$ mit $N_i = N_{i+1} = \cdots$

(3) jede $\emptyset \neq \mathcal{U}$ Menge von Untermoduln von M besitzt ein inklusionsmaximales Element.

Beweis. siehe 8. Vor am 13. 05. 2013.

Definition M ist noethersch wenn eine der Bedingungen $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ erfüllt ist.