Algebraische Zahlentheorie

SS 2013

Kuhlmann

8. Vorlesung am 13.05.2013

Beweis vom Lemma

(1) ⇒ (2) setze $N := \bigcup_i N_i$; $N \leq M$

Seien $x_1, \ldots, x_r \in N$ mit $N = \mathrm{span}_R\{x_1, \ldots, x_r\}$; und

$i \in \mathbb{N}$ so daß $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq N_i$. Dann ist $N \subseteq N_i$

und damit $N_i = N = N_{i+1} = \ldots$

(2) ⇒ (3) Sei $N_1 \in \mathcal{U}$ nicht maximal ⇒
$\exists\ N_2 \in \mathcal{U}$ mit $N_1 \subsetneq N_2$;
wiederhole mit N_2 :
$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3$ usw

Diese Prozedur muß nach endl. vielen Schritten anhalten und damit ein maximales Element produzieren.

(3) ⇒ (1) Sei $N \leq M$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller seinen

endl. erz. Untermoduln.

$\mathcal{U} \neq \emptyset$ (weil z.B $\{0\} \in \mathcal{U}$). Sei

$N' := \mathrm{span}_R\{x_1, \ldots, x_r\}$ maximales Element $\in \mathcal{U}$

Ist $N \supsetneq N'$ dann $\exists x \in N \setminus N'$
und $\mathrm{span}_R \{x_1, \dots, x_r, x\} \supsetneq N'$ ↯ $\square$

<u>Definition</u> M ist <u>noethersch</u> wenn eine der (äquivalente) Bedingungen erfüllt ist.
Ein Ring R ist <u>noethersch</u> heißt also jedes Ideal ist endl. erzeugt.

<u>Lemma 1.</u> Sei $N \leq M$.
M ist noethersch $\iff$ N ist noethersch und M/N ist noethersch.

<u>Beweis.</u> "$\Rightarrow$" $N' \leq N \Rightarrow N' \leq M \Rightarrow N'$ endl. erz.
Also N noethersch.

Wir benutzen nun Lemma 3 3. Vor und Lemma 2 4. Vor:
Sei nun $A/N \leq M/N$ wobei $A \leq M$ und $N \leq A$.

Also ist A endl. erz. und damit auch A/N.

"$\Leftarrow$" Sei $A \leq M$; Auf 3.3 $\Rightarrow A+N/N \simeq A/A\cap N$

Nun $A+N/N \leq M/N \Rightarrow A+N/N$ endl. erz i.e $A/A\cap N$ end. erz;

und $A \cap N \leq N \Rightarrow A \cap N$ endl. erz.

Lemma 2 (2) 4. Vor. impliziert nun A endl. erz. $\square$

<u>Korollar 2</u> M_1, M_2 noethersch $\Rightarrow M_1 \oplus M_2$ noethersch

<u>Beweis:</u> $M_1 \oplus M_2 / M_1 \simeq M_2$ also ist noethersch,
und M_1 ist noethersch. $\square$

Korollar 3 $\quad$ R noethersch, M endl. erz R-Modul $\Rightarrow$
M noethersch.

Beweis $\quad$ Lemma 1 5. Vor $\Rightarrow$ $M \simeq R^n / K$

Kor. 2 $\Rightarrow$ $R^n = R \oplus \dots \oplus R$ ist noethersch
+ Induktion

Lemma 1 $\Rightarrow$ M noethersch $\blacksquare$

Satz (Hilbert Basissatz).

Sei R noethersch; dann ist $R[x]$ noethersch.

Beweis. Sei $I \trianglelefteq R[x]$

Betrachte $\{a \in R \mid a \text{ ist Leitkoeffizient von } f \in I\}$.

Es ist ein Ideal (ÜA), also $\exists f_1, \dots, f_n \in I$

so daß die Leitkoeffizienten $a_1, \dots, a_n$ das Ideal erzeugen.

Setze $d := \max_i \deg f_i$; und

Betrachte den endl. erz. R-Modul

$$M_d := \sum_{i=0}^{d-1} R x^i$$

i.e den R-Modul der Polynome vom Grad $< d$.

Kor 3 $\Rightarrow$ M_d ist noethersch, also ist

$M_d \cap I \leq M_d$ endl. erz.

Seien $g_1, \dots, g_m \in I$ Erzeuger davon.

<u>Beh.</u> $I = \langle f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \rangle$

<u>Bew.</u> $\supseteq$ ist klar ✓

Sei nun $f \in I$. Wenn $\deg f < d$ dann ist $f \in \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ bereits. Also ~~OE~~ $\deg f := k+1 \geq d$.
Wir argumentieren per Induktion über k.
Wir multiplizieren f_i mit geeignete Potenz x^{l_i} und bekommen $f_i' \in I$ mit $\deg f_i' = k+1$.
Sei $f' := \sum_{i=1}^{n} r_i f_i'$

so daß Leitkoeffizient f' = Leitkoeffizient f.

Also ist $\deg(f-f') \leq k$ und per Induktionsannahme

ist $f - f' \in \langle f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \rangle$.

Da aber $f' \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ ist bekommen wir nun

schließlich daß $f \in \langle f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m \rangle$. ∎

<u>Korollar 4</u> R noethersch $\Rightarrow$ $R[x_1, \dots, x_n]$ noethersch. ∎

Erinnerung

Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $Y \subseteq S$ eine Untermenge.
Dann ist $R[Y]$ unsere Notation für den kleinsten Unterring von S der $R \cup Y$ enthält.

Wenn $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ endlich ist, dann schreiben wir dafür $R[y_1, \dots, y_n]$.

Der Evaluation Homomorphismus

$$\begin{aligned} ev_{\underline{y}} : R[x_1, \dots, x_n] &\twoheadrightarrow R[y_1, \dots, y_n] \\ f(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist surjektiv, also gilt

$$R[y_1, \dots, y_n] \simeq R[x_1, \dots, x_n] / \ker(ev_{\underline{y}})$$

(ein Faktorring vom Polynomring);

d.h $R[y_1, \dots, y_n]$ besteht aus Polynomen in $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Beispiel $R = K$ ein Körper
$S = L$ " " $L|K$ Körpererweit.

Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K; dann ist

$$ev_\alpha : K[x] \twoheadrightarrow K[\alpha]$$

hat nicht-trivialen kernel ; $\ker(ev_\alpha) = \langle \mathrm{MinPol}_K \alpha \rangle$,

also ist $K[\alpha] \cong K[x] / \ker(ev_\alpha)$

mit $\ker(ev_\alpha)$ maximales Ideal.

Wir sehen also: $K[\alpha]$ ist bereits ein Körper,

und damit gilt $K[\alpha] = K(\alpha)$. $\square$

__Korollar 5.__ Sei R noethersch, $S = R[a_1, \dots, a_n]$ eine Ringerweiterung.
Dann ist S noethersch.

__Beweis__ $R[a_1, \dots, a_n] \cong R[x_1, \dots, x_n] / \ker(ev_{\underline{a}})$

Nun Korollar 4 und Lemma 1 anwenden. $\square$

__Kapitel 3: Ganzheit. Erinnerungen.__

__Definition 1__ Sei $R \subseteq S$ Ringerweiterung

a) $\alpha \in S$ ist __ganz über R__ $\Leftrightarrow$
$\exists f \in R[x]$ normiert mit $f(\alpha) = 0$.

b) $R \subseteq S$ ist eine __ganze Ringerweiterung__
$\Leftrightarrow$ jedes $\alpha \in S$ ist ganz über R.