



Algebra Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

Sei E/F eine Körpererweiterung. Seien $G_1, G_2 \leq \text{Gal}(E/F)$ und seien F_1, F_2 Körper mit $E \supseteq F_1 \supseteq F$ und $E \supseteq F_2 \supseteq F$. Zeigen Sie, dass:

- (a) $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow \text{Inv}(G_1) \supseteq \text{Inv}(G_2)$
- (b) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow \text{Gal}(E/F_1) \supseteq \text{Gal}(E/F_2)$
- (c) $\text{Inv}(\text{Gal}(E/F)) \supseteq F$
- (d) $\text{Gal}(E/\text{Inv}(G)) \supseteq G$

Aufgabe 12.2

Zeigen Sie, dass:

- (a) $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- (b) $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$ wobei $\alpha \neq -1$ eine Nullstelle von $x^5 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist
- (c) $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{11})/\mathbb{Q}) \cong \{1\}$

Aufgabe 12.3

Sei K der Zerfällungskörper von $x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Finden Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung K/\mathbb{Q} .

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz der Galoistheorie.

Aufgabe 12.4

Sei α eine Nullstelle des Polynoms $x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass $\beta := \alpha^2 - 2$ und $\gamma := 2 - \alpha - \alpha^2$ auch Nullstellen von $p(x)$ sind. Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ Galois ist. Geben Sie alle Permutationen der Menge $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ an, die von Elementen von $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ induziert sind.

Abgabe **Montag, 11.02.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
