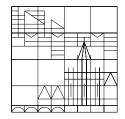
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory Katharina Dupont



Algebra Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Sei K ein Körper mit char K = p > 0.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a,b \in K$

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

gilt. Folgern Sie, dass für alle $a,b\in K$ und $n\in\mathbb{N}$

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\sigma: K \to K, \ a \mapsto a^p$$

ein Homomorphismus ist.

(Man nennt σ Frobenius oder Frobeniushomomorphismus.)

Aufgabe 5.2

Seien $p := X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass p irreduzibel ist.

Sei θ eine Nullstelle von p in einer Körpererweiterung von \mathbb{Q} .

- (b) Schreiben Sie $(\theta^2 1)^{-1}$ und θ^5 als Linearkombination von $1, \theta, \theta^2$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta^2 1)$.

Aufgabe 5.3

(a) Sei L/K eine Körpererweiterung mit [L:K]=3. Sei $x\in L$ und $y\in L\backslash K$. Zeigen Sie, dass $p,q,s,r\in K$ existieren so, dass

$$x = \frac{p + qy}{r + sy}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom x^2+1 irreduzibel über $\mathbb Q$ ist. Sei θ eine Nullstelle von x^2+1 in einer Körpererweiterung von $\mathbb Q$. Seien $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb Q$. Schreiben Sie

$$(a+b\theta)(\alpha+\beta\theta)$$

als Linearkombination über $\mathbb Q$ von $1, \theta$

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Sei θ eine Nullstelle von x^3-2 in einer Körpererweiterung von \mathbb{Q} . Seien $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$. Schreiben Sie

$$(a + b\theta + c\theta^2)(\alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2)$$

als Linearkombination über $\mathbb Q$ von $1, \theta, \theta^2$.

Aufgabe 5.4

- (a) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}.$
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}).$
- (c) Seien F ein Körper mit char $(F) \neq 2$ und $c,d \in F$ keine Quadrate in F. Zeigen Sie, dass $[F(\sqrt{d},\sqrt{c}):F]=4$ genau dann gilt, wenn cd kein Quadrat in F ist.

Abgabe Montag, 03.12.2012 bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.