Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1
Seien G eine Gruppe und N eine normale Untergruppe von G. Sei $\phi : G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus. Falls $A \leq G$ und $N \leq A$, schreiben wir $\overline{A} := A/N$.
Zeigen Sie, dass die Abbildung ϕ^* definiert durch

$$\phi^* : A \mapsto \phi(A) = \overline{A}$$

eine bijektive Abbildung von der Menge der Untergruppen von G die N enthalten in die Menge der Untergruppen von G/N ist.
Sei $N \leq A, B$. Zeigen Sie weiter, dass:

(i) $A \leq B$ genau dann, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$; und in diesem Fall ist $[B : A] = [\overline{B} : \overline{A}]$

(ii) $A \lhd B$ genau dann, wenn $\overline{A} \lhd \overline{B}$; und in diesem Fall ist $B/A \cong \overline{B}/\overline{A}$

(iii) $\overline{\langle A, B \rangle} = \langle \overline{A}, \overline{B} \rangle$

(iv) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Aufgabe 9.2

(a) Sei G eine Gruppe und seien $H, K \leq G$ mit $[G : H]$ und $[H : K]$ endlich. Beweisen Sie, dass $[G : K]$ endlich ist und weiter, dass

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

gilt.

(b) Sei G eine Gruppe und seien $H, K \leq G$ mit $[G : H]$ und $[G : K]$ endlich. Zeigen Sie, dass

$$[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K].$$

Falls $[G : H]$ und $[G : K]$ teilerfremd sind, zeigen Sie, dass

$$[G : H \cap K] = [G : H][G : K].$$

Hinweis: In Teil (b) betrachten Sie die Abbildung

$$\phi : x(H \cap K) \mapsto (xH, xK).$$

Vergessen Sie nicht zu erklären, warum diese Abbildung wohldefiniert ist.

Aufgabe 9.3
Seien G eine Gruppe und $K, H \lhd G$ normale Untergruppen. Zeigen Sie, dass $G/M \cap N$ isomorph zu eine Untergruppe von $G/N \times G/M$ ist. Weiter, zeigen Sie, dass

$$G/M \cap N \cong G/M \times G/N,$$

falls $G = NM$ ist.

Aufgabe 9.4
Sei G eine endliche kommutative Gruppe. Ferner, sei $p \in \mathbb{N}$ prim mit $p||G|$. Zeigen Sie, dass es $x \in G$ mit $|x| = p$ gibt.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion nach $|G|$. Im Induktionsschritt betrachten Sie $G/\langle x \rangle$ für ein gewisses $x \in G$.

Abgabe **Montag, 21.01.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
