Algebra B III

Kuhlmann.

10. Vorlesung

Am 26. 11. 2012.

<u>Definition</u>. 1. $\alpha \in K/F$ ist <u>algebraisch über F</u> (alg /F)
wenn es ein Polynom
$0 \neq f(x) \in F[x]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$.

2. wenn α nicht algebraisch ist, dann
heißt α <u>transzendent</u> über F.

3. die KE K/F heißt <u>algebraisch</u>
falls $\forall \alpha \in K$: α is alg / F.

<u>Proposition 1.</u> Sei α alg / F; es gibt ein
eindeutiges normiertes Polynom $m_{\alpha,F}(x) \in F[x]$
so daß (i) $m_{\alpha,F}(\alpha) = 0$ (ii) ist $f(\alpha) = 0$ für ein
$f \in F[x]$, dann teilt
$m_{\alpha,F}(x)$ das Polynom $f(x)$ in $F[x]$.

<u>Bew.</u> • Setze $m(x) := m_{\alpha,F}(x) :=$

normiertes Polynom vom minimalem deg
so daß $m(\alpha) = 0$.

Sei $f(x) \in F[x]$; schreibe

$$f(x) = q(x)\, m(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg m(x)$$

oder

$r(x) \equiv 0$

wen sehen:

$0 = f(\alpha) \Leftrightarrow r(\alpha) = 0.$

Die minimalatät vom $\deg m(x)$ impliziert $r(x) \equiv 0$

also $m(x) \mid f(x)$.

2 ist $m'(x)$ normiert vom minimalem deg mit $m'(\alpha)$ dann gilt wie oben

$m'(\alpha) \mid m(\alpha)$, aber auch $m(\alpha) \mid m'(\alpha)$;

$m(\alpha)$, $m'(\alpha)$ normiert $\Rightarrow m'(x) = m(x)$. $\boxtimes$

Bem: Vergleiche mit 13. Vorlesung LA II 01.06.2012:

Das minimal Polynom von T in $F[x]$ ist der eindeutige normierte erzeuger vom Annihilator Ideal von T

$$\mathcal{A}_T := \{ f \in F[x] \mid f(T) = 0 \}.$$

Definition $m_{\alpha,F}(x)$ heißt das minimal Polynom von α über F. Wir schreiben $m(x)$ wenn klar.

Proposition 2. Sei $\alpha \in K/F$ alg $/F$.

Es ist: $[F(\alpha):F] = \deg m_{\alpha,F}(x)$.

Beweis. $F(\alpha) \simeq F[x]/_{\langle m(x)\rangle}$. ∎

Terminologie $\deg \alpha / F := \deg m_{\alpha,F}(x) = \deg F(\alpha)/F$.

Bem. 1. $L \supseteq K \supseteq F$ $\quad \alpha \in L$ alg $/F$

$\rightarrow$ α alg $/K$. und es gilt:

2. $m_{\alpha,K}(x)$ teilt $m_{\alpha,F}(x)$ in $K[x]$

insbesondere:

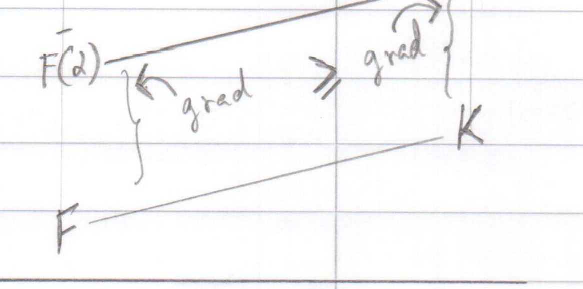
3. $\deg m_{\alpha,F}(x) \leq \deg m_{\alpha,F}(x)$

Es gilt ferner

4. $m_{\alpha,K}(x) = m_{\alpha,F}(x)$ gdw $m_{\alpha,F}(x)$ irreduzible bleibt in $K[x]$. Wir haben aus 3.:

5. $[K(\alpha):K] \leq [F(\alpha):F]$.

Für $\alpha \in L$ alg $/ F \subseteq K \subseteq L$:



Wir zeigen nun die Umkehrung vom Proposition 2.

[<u>Erinnerung</u>: K/F ist <u>endlich</u> wenn $[K:F]<\infty$; sonst unendlich]

<u>Proposition 3.</u> Sei $\alpha \in K/F$ so daß

$$[F(\alpha):F] < \infty. \quad \text{Dann ist } \alpha \text{ alg}/F.$$

Bew. Sei $[F(\alpha):F] = n$; dann sind

$F(\alpha) \ni 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ lin. ab. $/F$ also

$\exists\, b_i \in F$ <u>nicht alle gleich 0</u> so daß

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \alpha^i = 0. \quad \text{Setze} \quad \underset{\neq 0}{f(x) := \sum b_i x^i} \in F[\alpha];$$

dann gilt $f(\alpha) = 0$; α alg $/F$. ∎

<u>Bem.</u>: $x \in F(x)$ ist transz. über F

(weil $f(x) = 0 \iff f = 0$ das Nullpolynom ist).

Wir sehen $F(x)/F$ ist eine endlicherzeugte

(eigentlich eine einfache) Erweiterung aber

$$[F(x):F] = \infty.$$

Also i.a.:

$$K/F \text{ endlich erzeugt} \not\Rightarrow K/F \text{ endlich}. \quad ∎$$

<u>Korollar.</u> K/F endlich $\Longrightarrow$ K/F alg.

<u>Beweis.</u> Sei $\alpha \in F$; es ist $[F(\alpha):F] \leq [K:F] < \infty$; also α alg$/F$. ∎

<u>**Satz 1.**</u> $F \subseteq K \subseteq L$, Es gilt

$$[L:F] = [L:K][K:F]$$ (also insbesondere L/F unendlich gdw L/F oder K/F unendlich sind).

<u>Bew.</u> Zunächst nehmen wir an:

$[L:K] = m$, $[K:F] = n$ sei

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ Basis für L/K

$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ Basis für K/F

Ein Element λ aus L ist also aus der Form

$$\lambda = \sum_i a_i \alpha_i \quad \text{mit } a_i \in K \quad (*)$$

Schreibe

$$a_i = \sum_j b_{ij} \beta_j \quad \text{mit } b_{ij} \in F \quad (**)$$

$\rightsquigarrow$ Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ ergibt

$$\lambda = \sum_{i,j} b_{ij} \alpha_i \beta_j \quad (***)$$

also ist $\operatorname{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n\} = L$

Wir zeigen: diese Menge ist auch F-lin. unab.

Sei also $\sum_{i,j} b_{ij} \alpha_i \beta_j = 0$ für $b_{ij} \in F$. (+)

Setze $a_i := \sum_j b_{ij} \beta_j \in K$

und schreibe (†) also

$$\sum_i a_i \alpha_i = 0 ,$$

Nun α_i lin. unab / K $\Rightarrow$

$$a_i = 0 \quad \forall i \quad \text{also}$$

$$\sum_j b_{ij} \beta_j = 0 \quad \forall i ,$$

Nun β_j lin. unab / F $\Rightarrow$

$$b_{ij} = 0 \quad \forall j$$

Also $b_{ij} = 0 \quad \forall i, \forall j$. ▣

- Wir haben damit gezeigt:

$[L:F] = \infty \Rightarrow [L:K] = \infty$ oder $[K:F] = \infty$

- Sei nun $[K:F]$ unendlich, dann ist auch $[L:F]$ " weil K F-Unterraum von L.
- Sei nun $[L:K] = \infty$ dann ist a fortiori $[L:F] = \infty$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_s$ K-lin. unab $\rightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ F-lin. unab.). ▣

10. Vorlesung (26.11.2012

Korollar: Sei $L | K | F$ und L / F endlich.

Es gilt:

$$[K:F] \mid [L:F].$$ ∎

Wir haben bisher gezeigt: α alg $/ F. \iff [F(\alpha):F] < \infty$.

Wir sind nun in der Lage dieses zu verallgemeinern für $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Bem. $F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_1)(\alpha_2) \subseteq K$

[folgt unmittelbar aus der Definition von $F(\alpha_1, \alpha_2)$].

Satz 2. K/F ist endlich $\iff$ K/F endlich erzeugt von alg. $/F$ Elementen.

Beweis. "$\Rightarrow$" setze $[K:F] = n$, sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ F-Basis von K. Jedes α_i ist alg $/F$. Außerdem ist

$$K = \operatorname{span}_F \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq K,$$

und damit ist $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

"$\Leftarrow$" Sei $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$

Sei α_i alg $/F$ und $\deg \alpha_i = n_i$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
F_{k-1}(\alpha_k) = K \arrow[d, dash] \\
\vdots \arrow[d, dash] \\
F_{i+1} \arrow[d, dash] \\
F_i \arrow[d, dash] \\
\vdots \arrow[d, dash] \\
F_1 \arrow[d, dash] \\
F_0 = F
\end{tikzcd}$$

Setze $F = F_0$ $\quad F_1 = F_0(\alpha_1)$

$F_{i+1} := F_i(\alpha_{i+1})$; so $K = F_{k-1}(\alpha_k)$.

Es ist:

$$\begin{tikzcd}
F(\alpha_{i+1}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & F_i(\alpha_{i+1}) \arrow[d, dash] \\
F \arrow[r, dash] & F_i
\end{tikzcd}$$

Also $[F_{i+1} : F_i] \leq n_{i+1}$

Also (Satz 1):

$[K : F] = [F_k : F_{k-1}] \cdots [F_1 : F_0] \leq n_1 \cdots n_k$;

und damit ist K/F endlich. $\square$

Ende Prüfungsmaterial für die

Probeklausur am 06. 12. 2012