Algebra BIII

Kuhlmann

11. Vorlesung am

29. 11. 2012

Korollar 1. α, β alg $| F \Rightarrow \alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \; (\beta \neq 0)$ sind auch alg $| F$.

Bew. $F(\alpha, \beta) \,|\, F$ ist endlich und $\alpha \pm \beta, \; \alpha\beta, \; \alpha/\beta \; \in F(\alpha, \beta)$. $\square$

für $\beta \neq 0$

Korollar 2 Sei $L | F$ ~~alg~~ beliebige KE.

Die Menge $\{\alpha \in L \mid \alpha \text{ alg} / F\}$ ist ein Unterkörper von L (und enthält F).

Def. Dieser Unterkörper heißt der <u>relative algebraische Abschluß von F in L</u>.

Beispiele (1) $\mathbb{C} \,|\, \mathbb{Q}$

$\tilde{\mathbb{Q}} := \{ z \in \mathbb{C} \mid z \text{ alg über } \mathbb{Q} \}$ ist der

Körper der alg. Zahlen.

(2) $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$

$$\tilde{\mathbb{Q}}^r := \{ r \in \mathbb{R} \mid r \text{ alg} / \mathbb{Q} \}$$

ist der Körper der reellen alg. Zahlen.

Es gilt $\tilde{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$

und $\tilde{\mathbb{Q}}^r \subsetneq \mathbb{R}$

Eigenllich gilt es ferner:

$$|\tilde{\mathbb{Q}}| = |\tilde{\mathbb{Q}}^r| = \aleph_0$$

und $|\mathbb{C} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \setminus \tilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\aleph_0}$

(siehe Ausarbeitung dazu in Weihnachtübungsblatt !).

Satz 1. $\underset{\text{alg}}{L \mid K}$ und $\underset{\text{alg}}{K \mid F} \Rightarrow \underset{\text{alg}}{L \mid F}$.

Bew. Sei $\alpha \in L$; $k(x) \in K[x]$; $k(\alpha) = 0$.
Setze:
$k(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in K$ nicht alle Null.

Betrachte

$F_1 := F(a_0, \dots, a_n)$ und $F_1(\alpha)$

$F_1 \subseteq K$ $\qquad$ $F_1(\alpha) \subseteq L$

a_i alg / F und α alg / F_1

Also $[F_1 : F] < \infty$ und $[F_1(\alpha) : F_1] < \infty$

$$\Rightarrow \quad [F_1(\alpha) : F] = [F_1(\alpha) : F_1][F_1 : F] < \infty$$

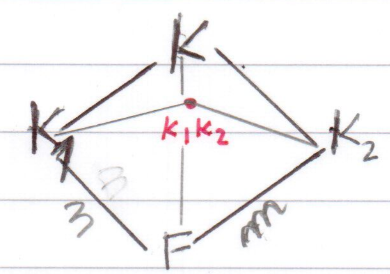
Insbesondere $F_1(\alpha) \mid F$ alg und damit α alg $/F$. $\blacksquare$

Definition und Notation. Sei $K \mid K_1$ und K/K_2 KE.

$$K_1K_2 := K_1(K_2) = K_2(K_1) \subseteq K$$

heißt **das Kompositum von K_1 und K_2 in K**.

Lemma: Sei



$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ F-Basis von K_1 und
$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ F-Basis von K_2.

OE $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Es ist: $\operatorname{Span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i, j\} = K_1K_2$

<u>Bew.</u> $K_1 K_2 = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$

so $\quad \mathrm{span}_F \{\alpha_i \beta_j \,/\, i, j\} \subseteq K_1 K_2.$

Umgekehrt müßen wir nun prüfen

daß $\mathrm{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i, j\}$ ist ein <u>Unterkörper</u>

von $\mathbb{K}$ (der offensichlich $F \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$

enthält) und damit

$$\mathrm{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i, j\} \supseteq K_1 K_2.$$

Aber es ist klar daß $\mathrm{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i, j\}$

Unterkörper ist, weil z. B:

$$\alpha_i^k \in F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{span}_F \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = K_1$$

und $\beta_j^l \in F(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \mathrm{span}_F \{\beta_1, \ldots, \beta_m\} = K_2$

und damit ist ~~er~~ abg. unter Multiplikation.

Analog, ist er abg. unter Inversen.

Ausserdem ist er alg unter Addition und

Substraktion (weil er F-VR ist). $\square$