Algebra B III

Kuhlmann

12. Vorlesung

am 03. 12. 2012

Ⓐ Wir haben bewiesen:

Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ F-Basis von $K_1 \mid F$

$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ " " " $K_2 \mid F$

Dann ist $\operatorname{span}_F \{\alpha_i \beta_j \mid i, j\} = K_1 K_2$

Also ist $[K_1 K_2 : F] \leq mn$.

Wir beobachten ferner:

Ⓑ $\operatorname{span}_{K_1}\{\beta_j \,;\, j = 1, \dots, m\} = K_1 K_2$ weil

$\lambda \in K_1 K_2$ schreibt man mit Hilfe von Ⓐ als

$$\lambda = \sum \gamma_{ij} \alpha_i \beta_j = \sum \underbrace{(\gamma_{ij} \alpha_i)}_{\in K_1} \beta_j$$

mit $\gamma_{ij} \in F$

Ferner gilt: $\{\beta_j \,;\, j = 1, \dots, m\}$ ist eine Basis für $K_1 K_2 / K_1$ falls K_1-lin.u

Ⓒ Analog zeigt man

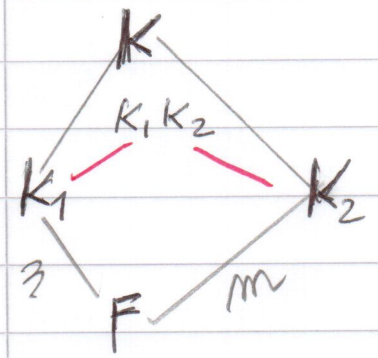
$\operatorname{span}_{K_2}\{\alpha_i \,;\, i = 1, \dots, n\} = K_1 K_2$ und $\{\alpha_i \,;\, i = 1, \dots, n\}$

ist eine K_2 - Basis für $K_1 K_2$ falls $\{\alpha_i ; i = 1, \dots, n\}$

bleibt lin. unab. $/ K_2$.

Wir haben bewiesen

<u>**Korollar 1.**</u> Seien $K \subseteq K_1, K_2 \subseteq K$



$$[K_1 : F] := n$$
$$[K_2 : F] := m$$

Es gilt:

$$[K_1K_2 : F] \leq n\,m$$

und $[K_1K_2 : F] = m\,n$ falls

β_j lin. unab über K_1 bleiben

(oder α_i lin. unab über K_2 bleiben). ▫

<u>**Korollar 2**</u>: Seien $K \subseteq K_1, K_2 \subseteq K$ mit

$$[K_1 : F] = n \quad , \quad [K_2 : F] = m$$

und $ggT(n, m) = 1$.

Es gilt: $[K_1 K_2 : F] = m\,n$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} n \mid [K_1K_2 : F] \\ m \mid [K_1K_2 : F] \end{array}\right\} \Rightarrow kgV(n,m) \mid [K_1K_2 : F]$$

$$kgV(n,m) = \frac{nm}{ggT(n,m)} = mn.$$

Also $mn \leq [K_1K_2 : F] \leq mn.$ $\boxed{}$

Zerfällungskörper.

Definition (1) $K \mid F$ ist ein Zerfällungskörper von $f(x) \in F[x]$ falls (i) $f(x)$ zerfällt ($\deg f \geq 1$) vollständig in linearen Faktoren in $K[x]$.

und

(ii) $F \subseteq L \subsetneq K \Rightarrow f(x)$ zerfällt nicht vollständig in linearen Faktoren in $L(x)$.

Satz 1 Es gibt einen Zerfällungskörper $K \mid F$ für $f(x)$ über F.

Bew. Per Induktion zeigen wir zunächst: Es gibt eine KE $E \mid F$ in der $f(x)$ vollständig zerfällt.

Setze $n = \deg f(x)$.

$n = 1$ $\quad E = F$ ✓ $\quad$ Induktionsanfang

$n > 1$ $\quad$ Sei $p(x)$ irred. Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit $\deg p \geq 2$

(Sonst ist wieder $E = F$).

Sei $\alpha \in E_1 | F$ $\quad$ NS von $p(x)$, über E_1.

haben wir also

$$f(x) = (x - \alpha)\, f_1(x) \qquad (*)$$

$$f_1(x) \in E_1(x) \; ; \; \deg f_1 \leq n-1.$$

IA für f_1 und E_1 ergibt eine

$E | E_1$ und f_1 zerfällt vollständig

in $E_1(x)$. Nun ist auch $\alpha \in E$

also f wie in $(*)$ zerfällt vollst. über E.

Setze nun $K := \cap \{ L \mid F \subseteq L \subseteq E;$

f zerfällt vollst. in $L[x] \}$. ▫

Definition 2. K/F ist <u>normal</u> falls

(i) K/F alg.

(ii) K ist zerf. körp. über F

einer Familie von Polynomen $f(x) \in F[x]$.

Proposition Sei $\deg f = n$; K/F

zerfällungskörper von f über F. Es gilt

$$[K:F] \leq n!$$

Beweis: Sei $\alpha_1 \in F_1/F$ $\quad \alpha_1$ NS von f

Dann ist $[F_1 : F] \leq n$ und

$$f(x) = (x-\alpha_1) f_1(x) \qquad f_1(x) \in F[x]$$

$$\deg f_1 \leq n-1$$

Wiederhole : $\alpha_2 \in F_2 / F_1$ $\quad \alpha_2$ NS von f_1

Dann ist $[F_2 : F_1] \leq n-1$ und damit

$$[F_2 : F] \leq n(n-1)$$

usw. $\blacksquare$

Satz 2. (Eindeutigkeit bis auf Isomorphie)

Sei $\varphi : F \xrightarrow{\sim} F'$ Isomorphie

$f(x) \in F[x] \rightsquigarrow f'(x) \in F'[x]$

$(\deg f \geq 1)$.

E Zerfäll. Körp. für f über F	E' Zerfäll. Körp. für f' über F'.

Dann läßt sich φ fortsetzen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & E' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & F' \end{array}$$

__Beweis__ sei $\deg f := n$. Induktion nach n.

Wenn f über F zerfällt dann
f' " F' " und $\sigma = \varphi$.

Sei also $p(x)$ irred. Faktor von $f(x)$ in $F[x]$ mit

$\deg p \geq 2$; $p' = \varphi(p)$ der entsprechende Faktor von $f'(x)$ in $F'[x]$;

$\alpha \in E$ NS für $p(x)$ setze $F_1 := F(\alpha)$ und
$\beta \in E'$ NS für $p'(x)$ $F_1' := F'(\beta)$.

Aus Satz 3 9. Vorlesung (22. 11. 2012) folgt $\exists \sigma_1$ so daß:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{\sim} & F_1' \\ | & & | \\ F & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & F' \end{array}$$

Wir haben also den folgenden Ansatz:

$$\sigma_1 : F_1 \xrightarrow{\sim} F_1'$$

$f(x) = (x-\alpha) f_1(x)$ über F_1, $\deg f_1 \leq n-1$

$f'(x) = (x-\beta) f_1'(x)$ über F_1', $\deg f_1 \leq n-1$

E Zerf. körp. von f_1 über F_1

E' Zerf. körp. von f_1' über F_1'

↑ (weil $E \supseteq F_1$ und alle NS von f_1 und für $E \supsetneq L \supseteq F_1$ ist es unmöglich daß L alle NS von f_1 enthält (sonst enthält L α und alle NS von f_1, also alle NS von f ↯ Minimalität von E als ein Zerf. körp. von f über F)

Also haben wir nun den Ansatz f_1, F_1, σ_1 mit $\deg f_1 \leq n-1$.

Induktionsannahme liefert eine σ so daß

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\sigma]{\sim} & E' \\ | & & | \\ F_1 & \xrightarrow[\sigma_1]{\sim} & F_1' \end{array}$$

Also

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & E' \arrow[d, dash] \\ F_1 \arrow[r, "\sim", "\sigma_1"'] \arrow[d, dash] & F_1' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & F' \end{tikzcd}$$

$\square$

Korollar: Ein Zerf.körp. von $f \in F[x]$ über F ist bis Isomorphie auf F eindeutig

Bew. Seien K und K' Zerf.körp. von f über F. Es gilt

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, dash] & K' \arrow[d, dash] \\ F \arrow[r, "Id"] & F \end{tikzcd} \qquad \sigma\restriction F = Id$$

$\square$

Definition (a) $\tilde{F} \,|\, F$ ist ein <u>algebraische Abschluß</u> von F falls

(i) $\tilde{F} \,|\, F$ algebraisch

(ii) $f(x) \in F[x]$ zerfällt vollst. in linearen Faktoren über $\tilde{F}$, für alle $f \in F[x]$.

(b) K heißt <u>algebraisch abgeschloßen</u>

falls jedes $f \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$ eine NS

in K hat.

<u>Bem.</u> K alg abg $\Leftrightarrow$ $f \in K[x]$ $(\deg f \geq 1)$

zerfällt vollständig in linearen Faktoren

über K $\Leftrightarrow$ $K = \tilde{K}$ $\blacksquare$