Algebra B III

Kuhlmann

13. Vorlesung
am 10.12.2012.

Proposition 1. Sei $\tilde{F}$ ein alg. Abschluß von F.
Dann ist $\tilde{F}$ alg. abgeschlossen.

Bew. Sei $f(x) \in \tilde{F}(x)$; α NS von $f(x)$

Dann ist $\underbrace{\tilde{F}(\alpha) \,|\, \tilde{F}}_{\text{alg}}$ und $\underbrace{\tilde{F} \,|\, F}_{\text{alg}}$

also

$\tilde{F}(\alpha) \,|\, F$ ist alg

also $\alpha \,|\, F$ ist alg.

Sei $m_{\alpha,F}$ Minpol von $\alpha \,/\, F$,

dann zerfällt $m_{\alpha,F}$ in $\tilde{F}[x]$ und hat

$(x-\alpha)$ als lin. Faktor. Es folgt: $\alpha \in \tilde{F}$. ∎

Sei F ein beliebiger Körper, wir zeigen nun:

Satz 1. Es gibt eine algebraische abgeschloßene KE von F.

Bew. Setze $F := K_0$. Wir definieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ eine ansteigende Folge

$$K_0 \subseteq \dots \subseteq K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq \dots$$

von KE so daß jedes Polynom $f \in K_{j-1}[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine NS in K_j hat.

Dann setzen wir $K := \bigcup K_j$.

$K \mid F$ ist dann eine KE, wenn

$f(x) \in K[x]$, $\deg f \geq 1$ so $\exists j$ mit $f(x) \in K_j[x]$

und f hat eine NS in $K_{j+1} \subseteq K$, also K ist algebraisch abgeschloßen. Und nun zur

$\rightsquigarrow$ Induktion:

Für $f(x) \in F[x]$, $\deg f \geq 1$ sei x_f eine neue Variable

Betrachte $F[\dots, x_f, \dots]$ (Polynomring in der Variablen x_f).

Und das Ideal

$$I := <\{f(x_f)\ ;\ f \in F[x]\}>.$$

Beh: I ist echt.

Sonst ist

$$(*) \quad 1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \dots + g_n f_n(x_{f_n})$$

mit $g_i \in F[\dots, x_f, \dots]$. Schreibe $x_i := x_{f_i}$ für $i = 1, \dots, n$

und seien $x_{n+1}, \dots, x_m$ alle andere Variablen

die unter den g_i's noch vorkommen.

Also

$$(*) \quad 1 = g_1(x_1, \dots, x_m) f_1(x_1) + \dots + g_n(x_1, \dots, x_m) f_n(x_n)$$

ist eine Polynomiale Gleichung.

Sei $F' | F$ KE mit $\alpha_i \in F'$ NS für $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Einsetzen von α_i für x_i $i = 1, \dots, n$ und
0 für x_j $j = n+1, \dots, m$
in $(*)$ muss immernoch eine Gleichung, die nun im Körper F' gelten muss, ergeben.

d.h $1 = 0$ in F' ↯ ▪ Beh.

I ist echt; sei $\mathcal{M}$ maximal; $\mathcal{M} \triangleleft F[\dots, x_f, \dots]$

und $I \subseteq \mathcal{M}$.

Setze $K_1 := F[\dots, x_f, \dots] / \mathcal{M}$

$K_1 | K_0$ und $f \in K_0[x]$ hat eine NS in K_1

weil $f(\overline{x_f}) = \overline{f(x_f)} = 0$ (da $f(x_f) \in I$).

Wiederhole mit $K_j | K_{j-1}$ und setze

$K = \bigcup K_j$ wie schon erwähnt. ▪

<u>Korollar 1:</u> z.z.: Sei K alg. abg; $F \subseteq K$.

Dann ist der relative alg. Abschluß

von F in K (siehe Kor 2 11 Vor 29.11.2012)

ein alg. Abschluß von F.

ÜA ⇝ • <u>Eindeutigkeit</u>:
ÜB

Ein alg. Abschluß von F ist bis auf Isomorphie eindeutig.

<u>Bew:</u> Per Definition ist $\tilde{F} \mid F$ algebraisch.

Sei $f(x) \in F[x]$; da K alg. abg ;
$\deg f \geq 1$

$K[x] \ni f(x)$ zerfällt vollständig in lin. Faktoren

$(x-\alpha)$ in $K[x]$. Aber $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ alg} \mid F \text{ also } \alpha \in \tilde{F} \\ \text{und } \alpha \in K \end{array} \right.$

also zerfällt $f(x)$ in $\tilde{F}[x]$. $\blacksquare$

§ Separable und inseparable Körpererweit.

<u>Bem.</u> Sei $f(x) \in F[x]$; $K \mid F$ Zerfallungskörper für f ; also

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} (x-\alpha_2)^{n_2} \ldots (x-\alpha_k)^{n_k}$$

in $K[x]$; $n_i \geq 1$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$

<u>Definition 1</u>
- n_i ist die <u>Vielfachheit</u> der NS α_i
- α_i ist eine <u>mehrfache</u> NS wenn $n_i > 1$

Sonst ist
- α_i eine <u>einfache</u> NS.

<u>Definition 2.</u> (1) $f(x) \in F[x]$ ist <u>separable</u>
$\deg f \geq 1$

wenn es nur einfache NS hat.

(2) f nicht separable heißt <u>inseparable</u>.

<u>Definition 3.</u> $Df(x) = D(a_n x^n + \dots + a_0) =$

$n a_n x^{n-1} + \dots + a_1 \in F[x]$.

$D : F[x] \longrightarrow F[x]$ ist <u>Ableitung Operator</u> und

erfüllt Produktregel:

$$D fg = g Df + f Dg$$

<u>Bem</u> (i) $\deg Df < \deg f$ immer!

(ii) $f(x) = x^p \in F[x]$
p Primzahl, $\operatorname{Char} F = p$

Dann ist $f(x) \not\equiv 0$ aber

$Df(x) = p\, x^{p-1} \equiv 0$.

(iii) $f(x) \in F[x]$ und $\operatorname{Char} F = 0 \Rightarrow$
$\deg f \geq 1$
$Df \not\equiv 0$ (weil z.B: $n a_n \neq 0$ falls $a_n \neq 0$ ist).

<u>Proposition 2.</u> Sei $f(x) \in F[x]$, $\deg f \geq 1$. Eine NS α für $f(x)$ ist eine mehrfache NS gdw

α ist auch NS für $Df(x)$.

Das heißt: die $\underset{\text{Menge}}{\{}$mehrfache NS von $f\}$ = {gemeinsame **NS von f und Df**}

<u>Beweis.</u>

$\Rightarrow$ Sei α mehrfache NS.

$$f(x) = (x-\alpha)^n \, g(x)$$
$$n \geq 2$$

$$Df(x) = n\,(x-\alpha)^{n-1} g(x) + (x-\alpha)^n \, Dg(x)$$

$n-1 \geq 1 \implies \alpha$ NS von $Df(x)$.

$\Leftarrow$ Sei α gemeinsame NS von $f(x)$ und $Df(x)$

Schreibe $f(x) = (x-\alpha)\, h(x)$ (*)

also ist $Df(x) = h(x) + (x-\alpha)\, Dh(x)$

α einsetzen ergibt $h(\alpha) = 0$;

zurück in (*) ergibt

$$f(x) = (x-\alpha)^2 \, h_1(x) \qquad \blacksquare$$

Bem: die mehrfachen NS von f stimmen überein mit den gemeinsamen NS von f und Df; d.h mit den NS von $ggT(f, Df)$.

Bew: "$\Leftarrow$" α NS von $ggT(f, Df) \Rightarrow \alpha$ NS von f und Df ist klar.

"$\Rightarrow$" sei α NS von f und $Df \in F[x]$, also

es gilt $m_{\alpha,F} \mid f$ und $m_{\alpha,F} \mid Df$;

und damit $m_{\alpha,F} \mid ggT(f, Df)$ auch.

Da α NS von $m_{\alpha,F}$ folgt nun α NS von ggT. ∎

Korollar 2. $\underset{\deg f \geq 1}{f \in F[x]}$ ist separabel gdw $ggT(f, Df) = 1$.

Beweis: "$\Leftarrow$" folgt aus der Bem.

"$\Rightarrow$" f sep $\Rightarrow$ keine gemeinsame NS mit Df

$\Rightarrow ggT(f, Df) = 1$. ∎