Algebra IB III

Kuhlmann

15. Vorlesung

am 17. 12. 2012.

<u>Definition</u> (1) G Gruppe $x \in G$

$$|x| := \begin{cases} \text{kleinste } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n = 1 & \text{falls vorhanden} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

$|x|$ ist die <u>Ordnung von x</u>; per Konvention $|x^0| = 1$.

(2) H is <u>zyklisch</u> wenn $\exists\, x \in H$ mit

$$H = \langle x \rangle := \{ x^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

und x heißt <u>Erzeuger</u> der Gruppe H

(additiv: $H = \langle x \rangle = \{ nx \mid n \in \mathbb{Z} \}$).

<u>Bem</u>: Eine zyklische Gruppe ist abelsch.

<u>Proposition 1.</u> $H = \langle x \rangle \Rightarrow |x|$ d.h

(1) $|H| = n < \infty \iff x^n = 1$ und $x^i \neq x^j$
$n \in \mathbb{N}_0$ für $i \neq j$; $i, j \in \{0, .., n-1\}$.

(2) $|H| = \infty$ gdw $x^i \neq x^j$
$\forall i, j \in \mathbb{N}_0$
mit $i \neq j$

<u>Bew.</u> (1) $|x| = n < \infty$

wenn $x^j = x^i \Rightarrow x^{j-i} = 1$
$0 \leq i < j < n$ mit $0 < j-i < n$ ↯

Sei $x^k \in \langle x \rangle$; $k = qn + r$ mit $0 \leq r < n$

also $x^k = x^{nq+r} = (x^n)^q x^r = x^r$.

(2) $|x| = \infty$ und $x^i = x^j \Rightarrow x^{j-i} = 1$
$i \neq j$

also $|x| \leq j - i$ ↯ ∎

<u>Proposition 2.</u> Sei G eine Gruppe, $x \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$
Es gelten:
$x^n = 1$ und $x^m = 1 \Rightarrow x^d = 1$ für $d = ggT(m, n)$

Insbesondere $x^m = 1 \Rightarrow |x| \mid m$.
$m \in \mathbb{Z}$

<u>Bew:</u> $d = mr + nS$

Also $x^d = (x^m)^r (x^n)^S = 1$.

Sei nun $x^m = 1$; setze $|x| = n$; schreibe $m = qn + r$ $0 \leq r < n$

$x^m = (x^n)^q \; x^r \Rightarrow x^r = 1$ ↯ also $r=0$. ☒

<u>Proposition 3.</u> Zyklische Gruppen derselber Ordnung sind isomorph.

<u>Bew</u> (1) Sei $|G| = |H| = n$

$G = \langle x \rangle \qquad H = \langle y \rangle$

Betrachte $\varphi : G \longrightarrow H$

$x^k \longmapsto y^k$

φ is wohldefiniert weil

$x^r = x^s \Rightarrow x^{r-s} = 1 \Rightarrow n \mid r-s \Rightarrow nt = (r-s)$

$\Rightarrow y^{(r-s)} = (y^n)^t = 1 \Rightarrow y^r y^{-s} = 1$

$\Rightarrow y^s = y^s$

φ ist ein Homom. ist klar

φ ist surjektiv ist auch klar.

Da beide Gruppen die gleiche Ordnung haben und endlich sind, folgt daß φ injektiv ist

⌈ eine Abbildung $\varphi: S \to S$

(S endliche Menge) ist injektiv $\Leftrightarrow$ sie ist surjektiv

$\Leftrightarrow$ sie ist bijektiv). ⌋

(2) Sei nun $|G| = |H| = \infty$

$$\varphi: G \to H$$

$x^k \mapsto y^k$ ist surjektiver Homom, und ferner

ist injektiv weil $x^i \neq x^j \Leftrightarrow i \neq j \Leftrightarrow y^i \neq y^j$. ∎

Bsp: (1) $|G| = n$ und G zyklisch $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_n$

(2) $|G| = \infty$ " " " $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$. ∎

Erzeuger:

Proposition 4. Sei G eine Gruppe; $x \in G$;

ÜB

$j \in \mathbb{Z}$; $j \neq 0$.

Es gelten: (1) $|x| = \infty \Rightarrow |x^j| = \infty$

(2) $|x| = n < \infty \Rightarrow |x^j| = \dfrac{n}{ggT(n,j)}$

(3) $|x| = n < \infty$ und $j | n \Rightarrow |x^j| = \dfrac{n}{j}$. ∎

Proposition 5. Sei $H = \langle x \rangle$ und $j \in \mathbb{N}$

(1) $|x| = \infty$ dann ist x^j Erzeuger

gdw $j = \pm 1$.

(2) $|x| < \infty$ dann ist x^j Erzeuger gdw
$|x| = n$.
$ggT(j, n) = 1$

Beweis. (1) ÜA
(2) x^j Erzeuger $\Leftrightarrow |H| = |x^j|$

also $\Leftrightarrow |x^j| = |x| \Leftrightarrow \dfrac{n}{ggT(j,n)} = n$

$\Leftrightarrow ggT(j, n) = 1.$ $\square$

Korollar 6. $|H| = n$; H zyklisch, dann ist

die Anzahl der Erzeuger von $H = \phi(n)$
(Euler).

Satz 7. Sei $H = \langle x \rangle$ zyklisch.

(1) $K \leq H \Rightarrow K$ zyklisch d.h. $K = \langle x^d \rangle$ (oder $K = \{1\}$)

wobei d die kleinste $d \in \mathbb{N}$ mit $x^d \in K$.

(2) $|H| = \infty \Rightarrow \langle x^j \rangle \neq \langle x^i \rangle$ für $i \neq j$; $i, j \in \mathbb{N}_0$

(3) $|H| = n < \infty$; $j \in \mathbb{N}_0$; $j \mid n$

$\Rightarrow \exists!\ K \leq H$; K zyklisch;

$|K| = j$ und $K = \langle x^{\frac{n}{j}} \rangle$ . . $\boxminus$