Algebra B III

– Kuhlmann –

16. Vorlesung am 20.12.2012.

Satz 1. Sei $H = \langle x \rangle$ zyklisch.

(1) Sei $K \leq H$, dann ist K zyklisch.

(2) Wenn $|H| = \infty$ dann sind $\langle x^j \rangle \neq \langle x^i \rangle$ für $i \neq j$, und $\{ \langle x^i \rangle ; i \in \mathbb{N}_0 \}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H. } üA.

(3) Wenn $|H| = n < \infty$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a | n$; dann gibt es eine eindeutige Teilgruppe der Ordnung a, nämlich $\langle x^{n/a} \rangle$; und $\{ \langle x^d \rangle \mid d | n \}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H $\neq \{1\}$.

Bew.

(1) $K = \{1\}$ ist zyklisch, also OE $K \neq \{1\}$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste so daß $x^k \in K$.

Also ist $\langle x^k \rangle \leq K$. Sei $x^a \in K$; DA $\Rightarrow$

$$a = qk + r \qquad 0 \leq r < k$$

und $x^r = x^a x^{-qk} \in K$.

Da k minimal gewählt ist, muss $r = 0$ sein.

Also $a = qk$ und $x^q = (x^k)^q \in \langle x^k \rangle$

Also $K \leq \langle x^k \rangle$. ∎

$\exists^z$ (3) Sei $d := \frac{n}{a}$ also $d \mid n$ und

$$|x^d| = \frac{n}{ggT(n,d)} = n/d = n/\tfrac{n}{a} = a$$

Somit ist $|\langle x^d \rangle| = a$.

Eindeutig. Sei $K \leq H$ mit $|K| = a$ und $b \in \mathbb{N}$ kleinste so daß $K = \langle x^b \rangle$. Wir berechnen:

$$\frac{n}{d} = a = |K| = |x^b| = \frac{n}{ggT(n,b)}$$

Daraus folgt: $d = ggT(n,b)$; insbesondere $d \mid b$,

also $x^b \in \langle x^d \rangle$ und $K = \langle x^b \rangle \leq \langle x^d \rangle$.

Da aber $|K| = a = |\langle x^d \rangle|$ folgt nun $K = \langle x^d \rangle$. ∎

Proposition 2. Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge von Teilgruppen; dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ auch eine Teilgruppe.

Bew.: Setze $K := \bigcap \mathcal{A}$; $a, b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in A$ $\forall A \in \mathcal{A}$ (weil $A \leq H$) also $ab^{-1} \in K$ und damit $K \leq H$.

Definition 1 Sei $S \subseteq H$ eine Untermenge;
$\mathcal{A} := \{K \leq H;\ S \subseteq K\}$

Definiere $\langle S \rangle = \bigcap \mathcal{A}$. $\langle S \rangle$ ist die (für die Inklusion) kleinste Teilgruppe von H die S enthält.

$\langle S \rangle$ heißt die <u>Teilgruppe</u> die von S erzeugt ist.

<u>Konvention</u>: $\langle \emptyset \rangle = \{1\}$.

<u>Notation</u>: $S = \{a_1, \dots, a_n\}$; $\langle S \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

(Wenn S endlich ist).

<u>Proposition 3.</u>: $\langle S \rangle = \{ a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} ; n \in \mathbb{N}, a_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1 \}$.

Sei $S \neq \emptyset$

<u>Bew</u>: ÜA, z.z: diese Menge ist eine Teilgruppe, sie enthält S, und muss in jeder Teilgruppe die S enthält enthalten sein. ∎

Spezialfall: Wenn H abelsch. ÜA, ÜB. ∎

<u>Proposition 4.</u> Sei $\varphi : G \longrightarrow H$ Homom., es gelten:

(1) $\varphi(1) = 1$ (2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ (3) $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

(4) $\ker \varphi := \{ g \in G ; \varphi(g) = 1 \} \leq G$

(5) $\operatorname{im} \varphi := \{ h \in H ; \exists g \in G : \varphi(g) = h \} \leq H$. ∎

Wir wollen Faktorgruppen definieren.

<u>Definition 2.</u> Sei $H \leq G$ und $g \in G$.

$gH := \{ gh \mid h \in H \}$ und $Hg := \{ hg \mid h \in H \}$

ist die linke Nebenklasse von g bezgl. H — rechte Nebenklasse.

Additive Notation: $g+H$ und $H+g$

Proposition 5. Sei $H \leq G$. Es gelten:

(1) die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von G

i.e. $G = \bigcup_{g \in G} gH$ und $uH \cap vH \neq \emptyset \Rightarrow uH = vH$

(2) $\forall u, v \in G$: $uH = vH \iff v^{-1}u \in H$.

Bew. (1) $1 \in H$ also $g \in gH$ $\forall g \in G$, also $G = \bigcup gH$.

Wenn $uH \cap vH \neq \emptyset$: sei $x \in uH$, $x \in vH$ also

$$x = uh_1 = vh_2 \quad \text{für geeignete } h_1, h_2 \in H$$

also $u = v \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$.

Sei $t \in H$; es gilt also

$$ut = v(h_2 h_1^{-1})t = v(h_2 h_1^{-1} t) \in vH;$$

So $uH \subseteq vH$. Analog: $uH \supseteq vH$.

(2) $uH = vH$ gdw $u \in vH$ gdw $u = vh$ für ein $h \in H$ gdw $v^{-1}u \in H$. ∎

Proposition 6. Sei $N \leq G$.

Die Verknüpfung

$$(uN)(vN) := (uv)N$$

ist wohldefiniert gdw

$$ghg^{-1} \in N \quad \forall g \in G, \forall h \in N. \quad (*)$$

Bew: "⇒" wohldefiniert →

$$\left.\begin{array}{l} u, u_1 \in uN \\ v, v_1 \in vN \end{array}\right\} \Rightarrow (uv)N = (u_1 v_1)N$$

Sei $g \in G$; $n \in N$.

$$\text{setze } \begin{array}{l} u = 1 \\ v = g^{-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} u_1 = n \\ v_1 = g^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 . g^{-1} N = n g^{-1} N \\ \text{i.e. } g^{-1} N = n g^{-1} N \end{array}$$

Nun $ng^{-1} \in ng^{-1}N$ also $ng^{-1} \in g^{-1}N$ also

$$ng^{-1} = g^{-1} n_1 \quad \text{für geeign. } n_1 \in N$$

also: $gng^{-1} = n_1 \in N$. ■ "⇒"

"⇐" Sei $u, u_1 \in uN$, $v, v_1 \in vN$ z.z: $(uv)N = (u_1 v_1)N$.

Schreibe $u_1 = un$ $\quad v_1 = vm \quad n, m \in N$

Wir zeigen: $u_1 v_1 \in (uv)N$; Wir berechnen:

$$u_1 v_1 = (un)(vm) = u(vv^{-1})\, n\, vm$$

$$= uv\underbrace{(v^{-1} n v)}_{:= n_1 \in N} m = uv\, n_1\, m = uv \underbrace{(n_1 m)}_{\in N}.$$

∎

<u>Zusatz</u> (Prop 6) wenn wohldefiniert; dann definiert die Verknüpfung $(uN)(vN) := (uv)N$ eine Gruppenoperation auf die Menge der linken Nebeklassen.

ÜA. ∎

<u>Definition</u>: Sei $N \leq G$. N ist normal falls (*) in Proposition 6 gilt. Schreibe $N \triangleleft G$.

<u>Beispiel</u>: Sei φ Homomorph. $N := \ker \varphi$ ist normal weil $\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1$ also $gng^{-1} \in N$ $\forall g \in G$; $n \in N$. ∎

Umgekert ; sei G/N die Gruppe der linken Nebenklassen
für ein $N \trianglelefteq G$; es gilt

Proposition 7 :

$$\varphi : G \twoheadrightarrow G/N$$
$$g \longmapsto gN$$

ist ein surjektiver Gruppenhom mit

$$\ker \varphi = N.$$ $\square$