Algebra B3

– Kuhlmann –

19. Vorlesung

In dieser Vorlesung wurde hauptsächlich die 18. Vorlesung kurz wiederholt, die Begriffe auf Deutsch nochmals zusammengefaßt.

<u>Definition</u> (1) Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ ist <u>einfach</u> wenn die einzige Normalteiler nur $\{1\}$ und G sind.

(2) $\{1\} = H_0 \leq \cdots \leq H_s = G$ ist <u>Normalreihe</u> wenn $H_i \lhd H_{i+1}$;

<u>Notation:</u> $H \lhd G$ " H Normalteiler in G "

wird auch so bezeichnet

$G \rhd H$ " $H \leq G$ ist Normalteiler".

(3) H_{i+1} / H_i ; $i = 0, \ldots, s-1$ sind die <u>Faktorgruppen</u> oder die <u>Faktoren</u> oder die <u>Quotienten</u> der Normalreihe.

(4) die Normalreihe heißt <u>Kompositionsreihe</u> falls alle Faktoren einfach sind.

(5) Zwei Reihen

$$H_0 \lhd \ldots \lhd H_i \lhd H_{i+1} \lhd \ldots \lhd G$$

und $K_0 \lhd \ldots \lhd K_j \lhd K_{j+1} \lhd \ldots \lhd G$

sind <u>äquivalent</u> wenn es eine Bijektion

$$i \longmapsto j$$

gibt so daß die korrespondiere Faktoren isomorph sind:

$$H_{i+1}/H_i \cong K_{j+1}/K_j$$

―――――― " ――――――

Ende der Wiederholung der 18. Vorlesung

―――――― " ――――――

<u>Definition 2.</u> G heißt <u>auflösbar</u> (Englisch: solvable) wenn es eine <u>Normalreihe mit abelschen Faktoren hat</u>

<u>Erinnerung</u>: (i) S_n ist nicht abelsch für $n \geq 3$

(ii) A_n ist nicht abelsch für $n \geq 4$

Begründung (ii) (123) und (234) kommutieren nicht.

<u>Beispiele</u>. S_n ist auflösbar für $n \leq 4$.

(a) $S_3 \rhd A_3 \rhd \{1\}$

$\left| S_3 / A_3 \right| = 2 \qquad \left| A_3 / \{1\} \right| = 3$

Diese zwei Gruppen haben Ordnung eine Primzahl. Es folgt aus Lagrange daß die Gruppen zyklisch sind, also abelsch.

(b) $S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd W \rhd \{1\}$

wobei

$V := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

die <u>Kleinsche Vierergruppe</u> ist

und

$W := \{1, (12)(34)\}$

$\left| S_4 / A_4 \right| = 2 \qquad \left| A_4 / V \right| = 3 \qquad \left| V / W \right| = 2.$ ☒

Algebra B3

– Kuhlmann –

20. Vorlesung

☺ Guten Morgen ☺

Wir werden später zeigen daß

S_n ist nicht auflösbar für $n \geq 5$ (Galois).

———— " ————

<u>Bemerkung</u>: jede abelsche Gruppe ist

trivialerweise auflösbar, betrachte.

$$G \rhd \{1\}.$$

———— " ————

Wir wollen nun auflösbare Gruppen

Charakterisieren.

<u>Definition (1)</u>. (i) für $g, h \in G$ definiere

$$(g,h) := g^{-1} h^{-1} g h \in G$$

(g,h) heißt <u>Kommutator</u> von g und h.

<u>Bem 1</u> $gh = hg\,(g,h)$.

(ii) (G,G) die <u>Kommutatorgruppe</u> von G

ist die Untergruppe die durch

$$S := \{ (g,h) \; ; \; g, h \in G \}$$

erzeugt wird.

Bemz (i) $(g,h) = (h,g)^{-1}$

also ist

$$\langle S \rangle = \{ s_1 \ldots s_n \mid n \in \mathbb{N} ; \; s_i \text{ ist ein Kommutator in } G \}$$

(ii) G ist abelsch gdw $(G,G) = \{1\}$

Notation: $(G,G) := G'$

(b) Wir definieren die iterierte Kommutatoren folgend: $G'' := (G')'$

Per Induktion über $k \in \mathbb{N}$:

$$G^{(k)} := \left(G^{(k-1)}\right)'$$

Wir werden nun die iterierte Kommutatoren ausnutzen, um unsere Charakterisierung zu geben.

Proposition 1. Seien $G, \bar{G}$ Gruppen

$$\eta : G \longrightarrow \bar{G} \quad \text{Hom.}$$

Es gelten:

1. $\eta(g,h) = (\eta(g), \eta(h))$

2. $\eta(G') \subseteq \bar{G}'$

3. Wenn η surjektiv ist gilt ferner:

$$\eta(G') = \bar{G}'$$

4. Insbesondere für beliebiges Hom. η gilt:

$$\eta(G') = \eta(G)'.$$

Zusatz 5. Allgemeiner gilt

$$\eta\left(G^{(k)}\right) = \eta(G)^{(k)} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Beweis 1. $\eta(g,h) = \eta(g^{-1}h^{-1}gh) = \eta(g)^{-1}\eta(h)^{-1}\eta(g)\eta(h)$

$$= (\eta(g), \eta(h)).$$

2. Also aus 1. folgt unmittelbar $\eta(G') \subseteq \bar{G}'$

3. Wenn η surjektiv folgt aus 1. daß jeder

Kommutator in $\overline{G}$ liegt in $\eta(G')$,

es folgt also aus Bem 2 daß $\eta(G') \supseteq \overline{G}'$

und damit die Gleichheit ist bewiesen.

4. Klar da $\eta: G \longrightarrow \eta(G)$

surjektiv ist.

5. $\eta(G') = \eta(G)'$ ist 4.

Nun betrachte

$$\eta: G' \longrightarrow \overline{G} \quad \text{und 4. nochmal}$$

anwenden ergibt

$$\eta\left((G')'\right) = \eta(G')'$$

i.e. $\eta(G'') = \left(\eta(G)'\right)' = \eta(G)''$,

usw per Induktion fortsetzen. $\square$

<u>Proposition 2.</u> $K \triangleleft G \Rightarrow K' \triangleleft G$

(Insbesondere: $G' \triangleleft G$).

<u>Beweis.</u> Sei $a \in G$ fest; und betrachte

$\gamma_a : K \to K$ wohldefiniert (weil K Normalteiler)

$k \longmapsto a k a^{-1}$ Hom.

Prop 1 $\Rightarrow$ $\gamma_a(K') \subseteq K'$ $\forall a \in G$

aber das bedeutet $K' \lhd G$. $\blacksquare$

Wir haben also

$$G \rhd G' \rhd G'' \rhd \dots \rhd G^{(k)} \rhd G^{(k+1)} \rhd \dots$$

Wir wollen zeigen:

G ist auflösbar $\Leftrightarrow$ $\exists k \geq 1$ mit $G^{(k)} = \{1\}$.

Dafür brauchen wir:

Lemma: Sei $K \lhd G$.

Es gilt: G/K ist abelsch $\Leftrightarrow$ $K \supseteq G'$

Insbesondere G/G' ist abelsch, und G' ist die kleinste Normale Untergruppe mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Bem 1 $\Leftrightarrow$ G/K abelsch $\Leftrightarrow$ $(G/K)' = \{1\}$

$\Leftrightarrow$ $(gK, hK) = 1$ $\forall g, h \in G$.

Aber $(gK, hK) = (gK)^{-1}(hK)^{-1} gKhK$

$= (g^{-1}h^{-1}gh)K = (g,h)K$.

Also G/K abelsch $\Leftrightarrow (g,h)K = K$

$\forall g,h \in G \Leftrightarrow (g,h) \in K \quad \forall g,h \in G$

$\Leftrightarrow G' \subseteq K$. ▤

Bemerkung 3 Wir erhalten

$$G^{(k)} / G^{(k+1)} \text{ is abelsch}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. ▤

Satz: G ist auflösbar $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$

gibt mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis: nächster Vorlesung.

Bemerkung 4: "$\Leftarrow$" folgt unmittelbar

aus Bemerkung 3.

Bemerkung 5: Sei $H \leq G$ es folgt

$$H^{(l)} \leq G^{(l)} \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$ ▤