Algebra B III

WS 2012-2013

– Kuhlmann –

---

2. Vorlesung am 25.10.2012

Korollar: Sei $I \trianglelefteq R$

Betrachte die Teilringe A von R mit

$$I \subseteq A \subseteq R \quad \text{einerseits}$$

und die Teilringe von R/I andererseits.

Die Abbildung

$$A \longmapsto A/I$$

ist bijektiv und respektiert Inklusion.

Ferner gilt für $I \subseteq A \subseteq R$ daß:

$$A \trianglelefteq R \quad \text{gdw} \quad A/I \trianglelefteq R/I.$$

Beweis. Siehe ÜB 2. ∎

Notation: $x+I$ wird manchmal auch als $\bar{x}$ geschrieben.

Definition. Sei $A \subseteq R$ eine beliebige Teilmenge.

Das <u>von A erzeugte Ideal</u> ist das kleinste

Ideal das A enthält (und wird mit

$\langle A \rangle$ bezeichnet), e.g $\langle \phi \rangle = \{0\}$.

Bemerkung (ÜA).

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\{A \subseteq J \triangleleft R\}} J$$

(ist der Durchschnitt aller Idealen die A enthalten) und außerdem ist

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \;/\; n \in \mathbb{N},\ r_i \in R;\ a_i \in A \right\}$$

(also die Menge aller R-Linerkombinationen aus endliche

Elementen von A).

Konvention: Wenn $A = \{a_1, \dots, a_l\}$ endlich

ist so schreiben wir einfach $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$.

Definition: Sei $a \in R$; $\langle a \rangle = \{ra \; ; \; r \in R\}$

heißt **Hauptideal** das von a erzeugt ist.

Beispiel: $\langle 1 \rangle = R$. und $\langle 0 \rangle = \{0\}$

Proposition. Sei $I \lhd R$

(1) $I = R$ gdw $I \cap R^{\times} \neq \emptyset$

(2) R ist ein Körper gdw die einzige Ideale R und $\{0\}$ sind.

Beweis.

(1) "$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$" $\underset{\text{Einheit}}{u \in I} \Rightarrow u^{-1} u \in I \Rightarrow 1 \in I$

$\qquad \qquad \qquad \hat{R} \qquad \Rightarrow r.1 \in I \quad \forall r \in R$.

(2) "$\Rightarrow$" Sei $I \neq \{0\}$ und $u \in I$; $u \neq 0$.
Dann ist u Einheit und somit $I = R$.

"$\Leftarrow$" Sei $x \in R$, $x \neq 0$.
Dann ist $\langle x \rangle = R$, d.h
$1 \in \langle x \rangle$, also $\exists\, r \in R$
mit $rx = 1$, also $r = x^{-1}$. $\blacksquare$

Korollar. Sei R Körper, S Ring, $\varphi : R \longrightarrow S$ Ringhomo; ist $\varphi \neq 0$ dann ist φ injektiv.

Beweis. $\ker \varphi = \{0\}$. $\blacksquare$

Definition $M \trianglelefteq R$ ist **maximal**

wenn

(i) $M \neq R$ (M ist echt)

(ii) Ist $I \trianglelefteq R$ mit

$$M \subseteq I \subseteq R$$

dann gilt: $I = M$ oder $I = R$

(also es gibt keine weitere Ideale strikt zwischen M und R).

Proposition Jedes echtes Ideal ist in einem Maximalideal enthalten.

Wir brauchen Zorn's Lemma.

Exkurs.

Partielle Ordnung:

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, eine partielle Ordnung auf A ist eine Relation $\leq$ auf A mit den Eigenschaften:

(1) $x \leq x \quad \forall x \in A$

(2) aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y \quad \forall x, y \in A$

(3) aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$
für alle $x, y, z \in A$.

$\leq$ ist <u>total</u> falls

(4) $\forall\, x, y \in A$: $x \leq y$ oder $y \leq x$.

<u>Definition</u> (i) Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt <u>Obereschranke</u> für B in A falls

$$b \leq a \qquad \forall\, b \in B.$$

(ii) $m \in A$ heißt <u>maximal</u> wenn gilt:

$$\forall\, x \in A : \; m \leq x \implies m = x.$$

<u>Zorn's Lemma:</u>

Sei $A \neq \emptyset$ eine partielle Ordnung mit der Eigenschaft: jede total angeordnete Teilmenge $B \subseteq A$ hat eine Obereschranke in A.

Dann hat A ein maximales Element. ∎

Ende Exkurs.

Beweis der Proposition.

Sei $I \trianglelefteq R$ $\quad I \subsetneq R$

Betrachte

$S :=$ die Menge aller echte Ideale von R die I enthalten.

$I \in S$ so $S \neq \emptyset$.

S ist partiell geordnet durch Mengeninklusion.

Wir behaupten daß jede total geordnete Teilmenge von S eine Obereschranke in S hat. Sei also $\mathcal{C} \subseteq S$ eine solche.

Setze $\quad J := \bigcup\limits_{C \in \mathcal{C}} C$

J ist Ideal: $0 \in J$, seien $a, b \in J$.

$\exists\ C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ mit $a \in C_1$ und $b \in C_2$.

Nun gilt: $C_1 \subseteq C_2$ oder $C_2 \subseteq C_1$ (weil $\mathcal{C}$ total geordnet ist). In jedem Fall ist $a+b \in J$

(weil $a+b \in C_1$ oder $a+b \in C_2$).

Analog zeigt man: $a \in J$ und $r \in R$

$\Rightarrow ra \in J$.

Nun zeigen wir: $J \subsetneq R$.

Sonst $1 \in J$ also $1 \in C$ für ein geeignetes

$C \in \mathfrak{C}$ $\lightning$ (weil $C \in \mathfrak{C}$ echt sein muss).

Anwendung von ZL ergibt:

S hat maximale Elemente.

Wenn M solches ist, dann ist klar

daß M ein maximales Ideal

welches I enthält ist, wie

behauptet. $\blacksquare$