Algebra BIII

Kuhlmann.

21. Vorlesung.

Am 21. 01. 2013

Satz 1. G ist auflösbar $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis "$\Leftarrow$" die Normalreihe

$$G \triangleright G' \triangleright \dots$$

hat abelsche Faktoren.

"$\Rightarrow$" Sei $G = G_1 \triangleright \dots \triangleright G_s \triangleright G_{s+1} = \{1\}$

eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. G_i / G_{i+1}.

Lemma (20. Vor) $\Rightarrow$ $G_{i+1} \supseteq G_i' \quad \forall i$

Beh. $G_i \supset G^{(i)} \quad \forall i$

$i = 1 \qquad G = G_1 \supset G' \quad \checkmark$

Induktionsannahme für k. $\checkmark$

Induktionsschritt für $k+1$:

$$G_{k+1} \supseteq (G_k)' \supseteq (G^{(k)})' = G^{(k+1)}. \quad \square \text{ Beh.}$$

Da $G_{s+1} = \{1\}$ folgt insbesondere $G^{(s+1)} = \{1\}$. $\square$

Satz 2. Sei G auflösbar.

(1) Sei $H \leq G$; dann ist H auflösbar

(2) Sei $\eta : G \twoheadrightarrow H$ eine surjektive Homomorphie

dann ist H auflösbar

Zusatz

(3) Sei G eine beliebige Gruppe,

$K \trianglelefteq G$ so daß: K und G/K

auflösbar sind. Dann ist G auch auflösbar.

Beweis.

(1) $H \subseteq G \Rightarrow H^{(i)} \subseteq G^{(i)}$ also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow H^{(k)} = \{1\}$.

(2) $\eta(G^{(i)}) = \eta(G)^{(i)}$ (Prop 1 (5) 20. Vor)

also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow \eta(G)^{(k)} = \{1\}$; also $H^{(k)} = \{1\}$

(3) Sei $\pi : G \twoheadrightarrow G/K$ die kanonische Projektion

es gilt $\pi(G^{(i)}) = (G/K)^{(i)}$. Nun G/K auflösbar

$\Rightarrow \exists k$ mit $\pi(G^{(k)}) = (G/K)^{(k)} = \{1\}$; i.e

$\forall x \in G^{(k)}$: $xK = K$; i.e $\forall x \in G^{(k)}$: $x \in K$

i.e. $G^{(k)} \subset K$.

Nun ist aber auch K auflösbar, also $\exists\, l$ mit

$$G^{(k+l)} = \left(G^{(k)}\right)^{l} \subseteq K^{(l)} = \{1\}. \quad \square$$

<u>Bemerkungen</u>:

(1) Eine endliche abelsche Gruppe $G \neq \{1\}$ die einfach ist, ist zyklisch mit Primordnung

Bew: da jede Untergruppe normal ist, G aber einfach, folgt: die einzigen Untergruppen sind $\{1\}$ und G.

Sei $x \neq 1$; $x \in G$; also $\langle x \rangle = G$.

So G ist zyklisch. Wenn $|G|$ <u>keine</u> Primzahl ist, dann gibt es eine Primzahl p mit $p \mid |G|$ und damit eine zyklische Untergruppe $H \leq G$ mit $1 < |H| = p < |G|$. $\lightning$

(2) G auflösbar und einfach $\Rightarrow$ G abelsch

Bew: $G \rhd \{1\}$ ist die einzig mögliche Normalreihe. $\square$

<u>Satz 3.</u> Eine endliche Gruppe ist auflösbar $\Leftrightarrow$ jeder Kompositionsfaktor einer Kompositionsreihe zyklisch mit Primordnung ist.

<u>Beweis.</u> "$\Rightarrow$" G auflösbar, sei

$$G = G_1 \rhd \ldots \rhd G_{s+1} = \{1\}$$

eine Kompositionsreihe. Nun ist auch G_i / G_{i+1} auflösbar [Satz 2 (1) und (2)] und einfach $\Rightarrow$ G_i / G_{i+1} abelsch, also zyklisch mit Primordnung [Bemerkungen (1) und (2)].

"$\Leftarrow$" Sei $G = G_1 \rhd \ldots \rhd G_{s+1} = \{1\}$ (*)

eine Kompositionsreihe (ex. wegen Jordan-Hölder) mit G_i / G_{i+1} zyklisch Primordnung.

Dann ist insbesondere G_i / G_{i+1} abelsch, und damit ist die Reihe (*) sogar eine auflösbare Reihe. $\square$

Erinnerung Ex. 4.1 (b) LA II $n \geq 3$

A_n ist von 3-Zykeln erzeugt.

Satz 4. A_n ist einfach für $n \geq 5$.

Beweis. Sei $K \neq \{1\}$ $K \trianglelefteq A_n$. z.z: $K = A_n$

Beh 1: Wenn K ein 3-Zykel enthält, dann enthält K alle 3-Zykeln.

Bew: Sei $(123) \in K$ und (ijk) beliebig

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ i & j & k & l & m & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{es gilt: } \gamma (123) \gamma^{-1} = (ijk) \; (*)$$

OE $\gamma \in A_n$ [sonst ersetze durch $(lm)\gamma$].

Nun K normal $\Rightarrow$ $(ijk) \in K$ wegen $(*)$.

Beh 2. K enthält ein 3-Zykel

Bew. Sei $\alpha \in K \trianglelefteq A_n$; $\alpha \neq 1$ mit maximaler Anzahl von Fixpunkten.

Wir zeigen: α ist ein 3-Zykel; sonst

Schreibe $\alpha = (123\ldots)\ldots$ (a)

oder $\alpha = (12)(34)\ldots$ (b)

als Produkt disjunkte Zykeln.

⌈ Beobachte dass im Fall (a): α muss noch zwei Zahlen bewegen; sonst ist $\alpha = (1\,2\,3\,k)$ eine ungerade Permutation ↯. ⌋

Setze $\beta := (3\,4\,5)$ und betrachte

$$\alpha_1 := \beta \alpha \beta^{-1} \qquad [\alpha_1 \in K \text{ weil } \alpha \in K \text{ und } K \lhd A_n]$$

Direktes Rechnen zeigt

$\alpha_1 = (1\,2\,4 \ldots) \ldots$ in Fall (a) und

$\alpha_1 = (1\,2)(4\,5) \ldots$ " " (b)

Auf jeden Fall ist $\alpha_1 \neq \alpha$ und damit

$$\alpha_2 := \alpha_1 \alpha^{-1} \neq 1. \qquad [\alpha_2 \in K]$$

Nun ist jede $l > 5$ durch β fixiert.

Beobachte: Also falls l auch durch α fixiert $\Rightarrow$ l auch durch α_2 fixiert.

Im Fall (a) direktes Rechnen zeigt

$\alpha_2(2) = 2$ und ausserdem bewegt

α in diesem Fall 1, 2, 3, 4, 5

also hat α_2 ein extra Fixpunkt

(nämlich 2), und $\alpha_2 \in K$. ↯

Im Fall (b) direktes Rechnen zeigt

$\alpha_2(1) = 1$ und $\alpha_2(2) = 2$, wieder ↯. ∎

<u>Korollar:</u> S_n ist <u>nicht</u> auflösbar für $n \geq 5$

<u>Beweis</u>: Sonst wäre A_n auflösbar;

aber A_n einfach $\Rightarrow$ A_n abelsch ↯. ∎