Algebra BIII

- Kuhlmann -

22. Vorlesung

Am 24.01.2013.

Unser nächstes Ziel ist die Sylow Sätze zu beweisen (Sonderfälle wofür die Umkehrung von Lagrange gilt).

Sylow 1. Sei G eine endliche Gruppe, p Primzahl $k \in \mathbb{N}$ so daß $p^k \mid |G|$.
Dann hat G eine Teilgruppe der Ordnung p^k.

Definition 1 eine solche Teilgruppe H mit $|H| = p^m$; m maximal ist eine **Sylow p-Untergruppe**.

Sylow 2. (1) Sylow p-Untergruppen sind konjugiert; d.h $\exists\ a \in G$ mit

$$H_2 = a\, H_1\, a^{-1}$$

(2) die Anzahl der Sylow p-Untergruppen ist ein Divisor von $[G : H]$ für eine (jede) Sylow p-Untergruppe H; und ist $\equiv 1 \mod p$.

(3) jede Untergruppe der Ordnung p^k ist

enthalten in einer Sylow p- Untergruppe.

Für die Beweise der Sylow Sätze brauchen wir Gruppenaktionen:

Definition 2. Sei G eine Gruppe, S eine Menge ($S \neq \emptyset$)

ist eine Abbildung

$$G \times S \longrightarrow S$$
$$(g, x) \longmapsto gx \qquad \text{so daß}$$

(i) $1x = x \quad \forall x \in S$ (ii) $g_1 g_2 x = g_1 (g_2 x) \quad \forall x \in S \; \forall g_1, g_2 \in G.$

heißt Gruppenaktion; wir sagen: G operiert auf S.

Definition 3. Sei: G operiert auf S und auf S'.

Die Aktionen heißen äquivalent wenn es eine

Bijektion $\quad \nu : S \longrightarrow S'$ gibt s.d.

$$\nu(gx) = g \cdot \nu(x) \qquad \forall g \in G, \; x \in S.$$

Proposition 1. Sei: G operiert auf S. Definiere

$$T(g) : S \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto gx.$$

Dann ist $T(g)$ eine Permutation auf S. ▣

<u>Notation</u>: Sym S bezeichnet die Gruppe der Permutationen von S.

Fortsetzung mit Ansatz von Proposition 1:

<u>Proposition 2.</u> die Abbildung

$$\begin{aligned} T: G &\longrightarrow \operatorname{Sym} S \\ g &\longmapsto T(g) \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhom. $\blacksquare$

<u>Definition 4.</u> $\ker T \lhd G$ heißt der ker der Aktion.

Die Aktion heißt <u>effektiv</u> wenn $\ker T = \{1\}$.

<u>Beispiele.</u>

(0). G operiert auf S und $H \leq G \Rightarrow H$ operiert auf S (durch Einschräckung)

G operiert auf S und $\mathcal{O} \subseteq S \Rightarrow$ G operiert auf $\mathcal{O}$ (auch Einschräckung).

(1) $S = G$, definiere die Aktion

"<u>linke Multiplikation</u>": $(g, x) \longmapsto \underbrace{gx}_{\text{Produkt im } G}$

ist eine effektive Aktion.

(ii) Dual dazu: "rechte Multiplikation".

(iii) Konjugation: $S = G$

$(g, x) \longmapsto g x g^{-1}$

Was ist hier der ker dieser Aktion?

$$\ker T = \{ g \mid \forall x \in G : g x g^{-1} = x \}$$

$$= \{ g \mid \forall x \in G : g x = x g \}$$

$$:= C_G$$

C_G heißt <u>Zentrum von G</u> und ist

eine normale Untergruppe. ∎

<u>Definition 5</u>: $H \leq \operatorname{Sym} S$ heißt Permutationsgruppe.

<u>Satz (Cayley)</u>.

Jede Gruppe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Beweis $S = G$ operiert mit linke multipl.

auf G; $T : G \longrightarrow \operatorname{Sym} G$

$g \longmapsto T(g)$

hat trivialen

$\ker T = \{1\}$.

Also $G \simeq T(G) \leq \operatorname{Sym} G$. ∎

Äquivalenzrelation durch Aktion induziert:

1. Seien $x, y \in S$, setze $x \underset{G}{\sim} y$ wenn es $g \in G$ gibt s.d.: $y = gx$.

$\underset{G}{\sim}$ ist eine äquivalenzrelation.

2. $[x] := Gx := \{gx \mid g \in G\}$ heißt die <u>Orbit</u>, oder <u>Bahn</u> von x.

3. $$S = \bigcupdot_{x \in S} Gx$$

Beispiele (Fortsetzung).

(i) Sei $H \leq G$ $\quad S = G$

H operiert durch linke multiplikation;

$[x] = Hx = \{hx \mid h \in H\}$

(die Nebenklasse von x).

(ii) G operiert auf G durch Konjugation

$[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ heißt die <u>Konjugation klasse</u>.

Proposition 3. (i) die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ gdw $x \in C_G$. ∎

(ii) Also ist das Zentrum von G die Vereinigung solcher Konjugationsklassen. ∎
