Algebra BIII

– Kuhlmann –

23. Vorlesung am 28.01.2013.

Definition 1. 1. G operiert transitiv auf S wenn es nur eine Bahn gibt, d.h

$$\forall x, y \in S : \quad x \underset{G}{\sim} y.$$

2. Der Stabilisator

$$\mathrm{Stab}_x := \{ g \in G \mid gx = x \}$$

ist eine Untergruppe von G, für jedes $x \in S$.

Bsp 1: G operiert auf G durch Konjugation $\Rightarrow$

$$\mathrm{Stab}\,x = \{ g \in G \mid g x g^{-1} = x \} = C(x)$$
$$= \{ g \in G \mid gx = xg \}$$

der Zentralisator von x in G.

Bmk (i) Wenn $y = ax$ dann ist $\mathrm{Stab}\,x = a^{-1} (\mathrm{Stab}\,y)\, a$

(ii) Also wenn G auf S transitiv operiert gilt: $\forall x, y \in S \;\; \exists a \in G$ s.d

$$\mathrm{Stab}_y = a\,(\mathrm{Stab}_x)\, a^{-1} \qquad \boxminus$$

Bsp 2. $H \leq G$ operiert transitiv auf

$$S := \{ xH \mid x \in G \}$$

mit $g(xH) := (gx)H$

Bew. Seien $xH, yH \in S$

Setze $g := yx^{-1}$ dann gilt es

$$gxH = yH \qquad \square$$

Wir zeigen daß, bis auf äquivalenz von Aktionen, alle transitive Aktionen so sind.

Satz 1. Es sei G operiert transitiv auf $S \neq \emptyset$.

Sei $x \in S$ und $H := \mathrm{Stab}_x$.

Dann ist die Aktion äquivalent zur Aktion auf $S' := \{ gH \mid g \in G \}$.

Bew. Definiere $\bar{\alpha} : \bar{G} \longrightarrow S$ mit $\bar{\alpha}(\bar{g}) := gx$, wobei

$$\bar{g} := \{ a \in G \mid ax = gx \} = \{ a \in G \mid g^{-1}a \in H \} = gH.$$

und $\bar{G} := \{ \bar{g} \mid g \in G \}$. Die Aktion ist transitiv $\Rightarrow \bar{\alpha}$ surjektiv.

üA $\bar{\alpha}$ ist wohldefiniert und bijektiv.

Wir müssen noch prüfen ob

$$\bar{\alpha}(h\bar{g}) \overset{?}{=} h\,\bar{\alpha}(\bar{g}) .\quad \text{üA.} \quad \blacksquare$$

Korollar 1. Es sei G endlich, operiert transitiv auf S. Dann ist

$$|S| = [G : \mathrm{Stab}_x]$$

für ein (jedes) $x \in S$, insbesondere ist S endlich und $|S| \mid |G|$. $\blacksquare$

Allgemeiner können wir ein Resultat für beliebige Aktion herleiten:

Korollar 2 (Bahngleichung) Es sei G endlich operiert auf S endlich. Es gilt

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} [G : \mathrm{Stab}_{x_i}]$$

wobei $\{x_1, \dots, x_r\}$ ein Vertretersystem der Bahnen ist

Beweis. Seien $O_1, \dots, O_r$ alle Bahnen.

Es ist leicht zu sehen daß die Aktion auf O_i transitiv ist, für jedes $i = 1, \dots, r$.

Also gilt $|O_i| = [G : Stab_{x_i}]$.

Nun ist $S = \dot\bigcup_{i=1}^{r} O_i$ also

$$|S| = \sum |O_i|.$$ ∎

<u>**Korollar 3**</u>
<u>**Klassengleichung**</u>

Sei G eine endliche Gruppe. Es gilt:

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} [G : C(x_i)]$$

wobei $\{x_1, \dots, x_k\}$ ein Vertretersystem der Konjugationsklassen ist.

<u>Bew.</u> G operiert auf G durch Konjugation, und

$$Stab_{x_i} = C(x_i) \text{ in diesem Fall.}$$ ∎

<u>**Korollar 4.**</u>
Klasseng. Bis.

$$|G| = |C_G| + \sum_{i=1}^{\ell} [G : C(y_i)]$$

wobei $\{y_1, \dots, y_\ell\}$ Vertretersystem für die Konjugationklassen in $G \setminus C_G$.

Beweis: Die Konjugationskl. von x ist $\{x\}$

gdw $x \in C_G$ gdw $C(x) = G$.

In Korollar 3 wird also in der Formel

$1 = [G : G] = [G : C(x_i)]$ so oft summiert

wie es Elemente in C_G gibt, also erhalten

wir $|C_G|$ als erster Summand. $\blacksquare$

Korollar 5.

Sei G endlich ; $|G| = p^k$ p Prim; $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt : $C_G \neq \{1\}$.

ÜB 11 Auf. 11.3. $\blacksquare$