Algebra B III

Kuhlmann

24. Vorlesung am 31.01.2013

§ Die Sylow Sätze, Beweise.

Sylow 1.

Induktion nach $|G|$. $|G| = 1$ klar.

Induktionsannahme: Sylow 1 gilt für alle Gruppen der Ordnung $< |G|$.

Induktionsschritt. Wir werden "Cauchy's Satz" benutzen:

<u>Aufgabe 9.4</u> benötigen: Sei G eine endliche abelsche Gruppe; $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, $p \mid |G|$.

Dann existiert $x \in G$ mit $|x| = p$. $\square$

Betrachte die Klassengleichung:

$$|G| = |C_G| + \sum_{y_i \notin C_G} [G : C(y_i)]$$

und beachte daß $C := C_G$ abelsch ist.

Zwei Fälle zu betrachten:

Fall 1. $p \nmid |C| \Rightarrow \exists j$ mit $p \nmid [G : C(y_j)]$.

Aber $p^k \mid |G| = [G : C(y_j)] \, |C(y_j)|$

also $p^k \mid |C(y_j)|$

Nun $|C(y_j)| < |G|$ da $y_j \notin C$

I. A $\Rightarrow$ $C(y_j)$ besitzt eine Untergruppe der Ordnung p^k.

Fall 2. $p \mid |C| \Rightarrow$ Cauchy's Satz liefert ein Element c der Ordnung p. Nun ist $\langle c \rangle \trianglelefteq C$; $|\langle c \rangle| = p$.

Betrachte die Gruppe $G/\langle c \rangle$, der Ordnung

$$\frac{|G|}{|\langle c \rangle|} = \frac{|G|}{p}. \text{ Also } p^{k-1} \;\Big|\; \left|\frac{G}{\langle c \rangle}\right|.$$

Induktionsannahme $\Rightarrow \exists$ eine Untergruppe von $G/\langle c \rangle$ der Ordnung p^{k-1}.

Nun die Untergruppen von $G/\langle c \rangle$ haben die Gestalt $H/\langle c \rangle$ wobei $H \leq G$ und $\langle c \rangle \leq H$.

Also $\exists\, H \leq G$ mit

$$\left| H/_{\langle c \rangle} \right| = p^{k-1}$$ und damit ist

$$|H| = \left| H/_{\langle c\rangle} \right| \, |\langle c \rangle| = p^{k-1} \cdot p = p^k. \quad \blacksquare$$

Sylow 2. Wir benötigen eine

__Bemerkung.__ Sei $H \leq G$ und $g \in G$; dann ist gHg^{-1} auch eine $\leq G$.

Also haben wir eine Aktion von G auf

$\Gamma :=$ die Menge der Untergruppen von G

durch Konjugation.

- Für die Aktion berechnen wir:

$$\operatorname{Stab}_H := \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$$

$H \in \Gamma$ $\quad := N(H)$ der Normalisator von H in G.

- Beachte: $H \trianglelefteq N(H)$.

- Wir berechnen die Bahnen:

$$\mathcal{O}_H = \{ gHg^{-1} \mid g \in G \}$$

$H \in \Gamma$

Kor 1 23. Vor liefert

$$|\mathcal{O}_H| = [G : N(H)] \quad \text{und}$$

$$[G:H] = [G:N(H)]\,[N(H):H] \quad \text{so}$$

$$|\mathcal{O}_H| \;\Big|\; [G:H].$$

- Für spezialisieren diese Aktion auf die Menge $\Pi \subseteq \Gamma$ der Sylow p-Untergruppen von G. Die Aktion auf Π ist wohldefiniert weil $gHg^{-1} \in \Pi$ wenn $H \in \Pi$. Wir bekommen:

Hilfs Lemma:

(i) Sei $P \in \Pi$; $H \leq N(P)$; $|H| = p^j$; dann ist $H \leq P$. Es folgt

(ii) P ist eine Sylow p-Untergruppe von $N(P)$, und die einzige solche.

Beweis vom Hilfslemma:

$\left.\begin{array}{l} H \le N(P) \text{ und} \\ P \trianglelefteq N(P) \end{array}\right\} \Rightarrow$ HP ist Untergruppe und

$$HP/P \simeq H/(H \cap P)$$

(Isom. Satz). Also ist HP/P isomorph zu einer Faktorgruppe von H und damit hat sie Ordnung

$|HP| = p^k$ für ein geeignetes k;

also $|HP| = p^k \mid |P|$.

Da aber P Sylow p-Untergruppe ist, müssen wir $k = 0$ haben.; i.e.

$HP = P$ so $H \le P$. $\blacksquare$

Beweis von Sylow 2 (2): Wir betrachten

Σ eine Bahn.

Fall 1: Sei $P \in \Sigma$; und betrachte die Aktion von P auf Σ. Wir bekommen eine Partition von Σ in P- Bahnen.

- Betrachte die Bahn von P; die ist offensichtlich $\{P\}$ (weil $xPx^{-1} = P \quad \forall x \in P$).

- Wir behaupten $\{P\}$ ist die einzige Bahn der Kardinalität 1:

Sei $\{P'\}$ eine P - Bahn, dann gilt

$x \, P' \, x^{-1} = P' \quad \forall x \in P$;

d.h $P \subseteq N(P')$.

Hilfslemma (ii) liefert: $P = P'$

[weil P' ist die einzige Sylow p- Untergruppe von $N(P')$, und P ist eine Sylow p- Untergruppe von $N(P')$.]

- Beachte daß jede P - Bahn Kardinalität eine Potenz von p hat, da ~~s~~ diese Kardinalität die Kardinalität $|P|$ teilen muss (Kor 1 23. Vor).

Also ist $|\Sigma| \equiv 1 \mod p$; dieses beweist die zweite Aussage in Sylow 2 (2). Nun beweisen wir Sylow 2 (1). Wir zeigen Σ ist die einzige Bahn. Sonst gibt es $\underline{P} \in \Pi$ mit

Fall 2: $\underline{P} \notin \Sigma$. Betrachte wieder die Aktion von $\underline{P}$ auf Σ. Analog wie im Fall 1 sehen wir daß es überhaupt keine $\underline{P}$-Bahnen gibt der Kardinalität 1 [die einzige Möglichkeit, nämlich $\{\underline{P}\}$, scheidet nun aus weil $\underline{P} \notin \Sigma$ ist].

Also ist $|\Sigma| \equiv 0 \mod p$. $\lightning$.

So $\Sigma = \Pi$ und damit ist (1) bewiesen.

Es ist $|\Pi| = [G : N(\underline{P})]$ $\forall$ $\underline{P} \in \Pi$ (Kor 1 23. Vor); also ist die Anzahl der Sylow p-Untergruppen ein Divisor.

Dieses beweist die erste Aussage in Sylow 2 (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (3).

Sei $H \leq G$; $|H| = p^k$.

Betrachte die Aktion von H auf Π.

Die H-Bahnen haben Kardinalität ein Divisor von $|H|$; also haben die
(Kor 1 23. Vor)

H-Bahnen Kardinalität eine Potenz von p.

Nun ist aber $|\Pi| \equiv 1 \mod p$

also gibt es eine H-Bahn $\{P\}$ mit nur einem Element; d.h.

$H \leq N(P)$ und damit

$H \leq P$ (Hilfslemma (i)). ∎