Algebra B III

Kuhlmann

26. Vorlesung.

Beweis Fundamentaler Satz der Galois Theorie $\begin{Bmatrix} \text{Satz 0.8} \\ \text{25. Vor} \end{Bmatrix}$
sei E/F endliche Galoiserweiterung;
Betrachte die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Sigma &\xrightarrow{\gamma} \Gamma \\ K &\longmapsto \mathrm{Gal}(E/K) \quad (\leq \mathrm{Gal}(E/F)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma &\longrightarrow \Sigma \\ H &\longmapsto \mathrm{Inv}\ H \quad (\subseteq E \text{ und } \supseteq F) \end{aligned}$$

wobei $\Gamma :=$ Menge der Untergruppen von

$$G := \mathrm{Gal}(E/F)$$

und

$$\Sigma := \text{die Menge der Zwischenkörper}$$

$$F \subseteq K \subseteq E.$$

Wir behaupten $i \circ \gamma = \mathrm{Id}$ und $\gamma \circ i = \mathrm{Id}$.

i.e. $\mathrm{Gal}(E/\mathrm{Inv}\,H) = H$ und $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}(E/K)) = K$
d.h. $(\gamma \circ i)(H) = H$ und $(i \circ \gamma)(K) = K$

Das ist aber die letzte Aussage in Satz 0.6

der 25. Vor (weil H endlich ist); genauer:

- $H \leq G$ also $F := \mathrm{Inv}\, G \subseteq \mathrm{Inv}\, H$

und $K = \mathrm{Inv}\, H$ ist eine Zwischenerw.

$$F \subseteq K \subseteq E \,;$$

und Satz 0.6 anwenden mit H anstatt G liefert

$$\mathrm{Gal}\,(E / \mathrm{Inv}\, H) = H \,;$$

also $|H| = |\mathrm{Gal}\,(E/\mathrm{Inv}\, H)| = [E : \mathrm{Inv}\, H]$

(Lemma 0.3 25. Vor).

- Sei nun K ein Unterkörper von E/F

(i.e $F \subseteq K \subseteq E$), und

$$H := \mathrm{Gal}\,(E/K)$$

dann ist $H \leq G$ $(= \mathrm{Gal}\,(E/F))$.

Nun ist E immernoch Zerfällungskörper über

K von einem separablem Polynom (weil E so ist über F). Also Satz 0.6 anwenden für

E und K liefert

$$K = \mathrm{Inv}\ H = \mathrm{Inv}\,(\,\mathrm{Gal}\,(E/K)\,).$$

- (i) ist eine unmittelbare Folgerung

der allgemeinen Eigenschaften (ÜB Auf. 12.1):

$H_1 \supseteq H_2 \Rightarrow \mathrm{Inv}\ H_1 \subseteq \mathrm{Inv}\ H_2$;

nun ist $\mathrm{Inv}\ H_1 \subseteq \mathrm{Inv}\ H_2$ dann ist

$H_1 = \mathrm{Gal}\,(E/\,\mathrm{Inv}\ H_1) \supseteq \mathrm{Gal}\,(E/\,\mathrm{Inv}\ H_2) = H_2$.

- die erste Aussage in (ii) haben wir schon

bewiesen : $|H| = [E : \mathrm{Inv}\ H]$;

wir berechnen:

$$|G| = [E : F] = [E : \mathrm{Inv}\ H]\,[\mathrm{Inv}\ H : F]$$

$$= |H|\ [\mathrm{Inv}\ H : F];$$ vergleiche

aber auch

$$|G| = |H|\ [G : H];$$

$\Rightarrow\ [G : H] = [\mathrm{Inv}\ H : F]$, dies ist die zweite Aussage in (ii)

Zu (iii)

Sei $H \in \Gamma$ und $K := \mathrm{Inv}\, H$. Dann ist

$$\mathrm{Inv}\,(\eta H \eta^{-1}) = \eta(K) \quad (\text{für } \eta \in G)$$

weil $\forall\, \xi$ gilt: $\xi(k) = k \iff$

$(\eta \xi \eta^{-1})(\eta(k)) = \eta(k)$.

Es folgt: $H \trianglelefteq G \iff \eta(K) = K \quad \forall\, \eta \in G$ $(*)$.

(i.e K ist (mengenweise) invariant).

Nehmen wir nun an daß $H \trianglelefteq G$.

Aus $(*)$ folgt daß $\bar{\eta} := \eta/_K$ ist ein

Automorphismus von K über F. Betrachte also nun

den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(E/F) = G &\longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \\ \eta &\longmapsto \bar{\eta} \end{aligned}$$

und berechne das Bild $\bar{G}$ und der Kern davon.

~~...~~ Bemerke daß $\mathrm{Inv}\, \bar{G} = F$ und $\bar{G} = \mathrm{Gal}(K/F)$

Der Kern ist die menge aller $\eta \in G$ mit $\eta/_K = \mathrm{Id}$

Das heißt der Kern ist genau $Gal(E/K) = H$.

Wir bekommen nun $\overline{G} = Gal(K/F) \simeq G/H$.

Da $F = \operatorname{Inv} \overline{G}$; K/F ist eine normale Erweiterung (Satz 0.6 2. 25. Vorlesung).

Umgekehrt sei K/F normal. Sei $a \in K$ und $f(x) := \operatorname{MinPol}_F a$; $f(x)$ zerfällt in lin. Faktoren über $K[x]$.

Dann ist $f(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_m)$ in $K[x]$ mit $a = a_1$.

Sei $\eta \in G$ dann ist

$0 = \eta(f(a)) = f(\eta(a))$ also ist $\eta(a)$ eine N.S und somit $\exists i$ mit $\eta(a) = a_i$. Insbesondere ist $\eta(a) \in K$. Wir haben gezeigt $\eta(K) \subseteq K$ $\forall \eta \in G$, und damit durch (*) ist

$H := Gal(E/K) \trianglelefteq G$. $\boxtimes$