– Algebra B III –

– Kuhlmann –

– 3. Vorlesung am 29.10.2012. –

Proposition: $M \trianglelefteq R$ ist maximal gdw R/M ein Körper ist.

Beweis: M maximal gdw $M \subsetneq R$ und es keine Ideale A gibt mit

$$M \subsetneq A \subsetneq R$$

d.h gdw

R/M nur $M/M = \{0\}$ und R/M als Ideale hat. Nun Proposition S.3 2. Vor. anwenden. ∎

Beispiel: $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ ist maximal gdw $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ ein Körper ist gdw $n = p$ eine Primzahl ist (LA I 3. Vor). ∎

Definition: $P \trianglelefteq R$ ist Primideal wenn (1) P ist echt ie $P \subsetneq R$

---

(2) aus $ab \in P$ $(a, b \in R)$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$.

Beispiel: $\{0\} \neq p\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ ist Primideal gdw

p eine Primzahl ist.

Proposition $P \trianglelefteq R$ ist Primideal gdw

R/P Integritätsbereich ist.

Beweis: Seien $a, b \in R$. ; $P \trianglelefteq R$, dann ist

P ist Primideal gdw $\left[\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \text{ oder } \bar{b} = \bar{0}\right]$

$(\bar{a} = \bar{0}$ bedeutet $a \in P)$ gdw $R/_P$ integer ist ∎

Korollar: Jedes maximales Ideal ist Primideal. ∎

Definition (1) Seien R, S Ringe. Wir definieren

Ringoperationen auf $R \times S$ (Koordinatenweise)

$$\left.\begin{array}{l}(r_1, s_1) + (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, \; s_1 + s_2) \\ (r_1, s_1) \times (r_2, s_2) := (r_1 r_2, \; s_1 s_2)\end{array}\right\} \forall r_1, r_2 \in R \;\; s_1, s_2 \in S.$$

$R \times S$ heißt Ringprodukt.

(2) $A, B \trianglelefteq R$ sind teilerfremd ~~wenn~~

$A + B = R$ (wobei $A + B := \{a + b \,;\, a \in A, b \in B\}$)

Satz (Chinesischer Restesatz).

Seien $A_1, \dots, A_k \trianglelefteq R$. Die Abbildung

$$\varphi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} (R/A_i)$$

$$r \longmapsto (r + A_1, \dots, r + A_k)$$

ist Ringhomo. mit $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$.

Wenn A_i, A_j teilerfremd sind, für alle $i \neq j$, dann ist φ surjektiv.

Im diesem Fall gilt also (Isomorphiesatz):

$$R / \bigcap_{i=1}^{k} A_i \cong \prod_{i=1}^{k} (R/A_i).$$

<u>Beweis.</u> OE $k = 2$. Prüfe ob $\varphi(r_1 + r_2) \stackrel{?}{=} \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$

$$\varphi(r_1 + r_2) = ((r_1 + r_2) + A_1, (r_1 + r_2) + A_2) =$$

$$((r_1 + A_1) + (r_2 + A_1), (r_1 + A_2) + (r_2 + A_2)) =$$

$$((r_1 + A_1), (r_1 + A_2)) + ((r_2 + A_1), (r_2 + A_2))$$

$$= \varphi(r_1) + \varphi(r_2).$$

usw...

Also φ Ringhomo.

$\ker \varphi = \{ r \mid \varphi(r) = 0 \} = \{ r \mid \varphi(r) = (A_1, A_2) \}$

$= \{ r \mid r \in A_1$ und $r \in A_2 \}$.

Sei nun $A_1 + A_2 = R$, also $\exists\, x \in A_1,\ y \in A_2$ mit

$$x + y = 1$$

insbesonders $\varphi(x) = (0, 1)$ und $\varphi(y) = (1, 0)$.

Sei nun $(r_1 + A_1, r_2 + A_2) \in R/A_1 \times R/A_2$ beliebig.

Setze $r := r_2 x + r_1 y$ und berechne:

$\varphi(r) = \varphi(r_2 x + r_1 y) = \varphi(r_2)\varphi(x) + \varphi(r_1)\varphi(y)$

$= (r_2 + A_1, r_2 + A_2)(0, 1) + (r_1 + A_1, r_1 + A_2)(1, 0) =$

$(0, r_2 + A_2) + (r_1 + A_1, 0)$

$= (r_1 + A_1, r_2 + A_2)$. Also φ surjektiv. $\blacksquare$

__Bruchringe.__

__Definition.__ $D \subseteq R$ ist multiplikativ falls $1 \in D$ und $st \in D$ für alle $s, t \in D$.

__Beispiele.__ (i) $D = R^\times$
(ii) $D = R \setminus P$ mit $P \trianglelefteq R$ Prim.

(*) Sei nun D multiplikativ, ohne Nullteiler, $0 \notin D$.

→ Definiere eine Relation $\sim$ auf $R \times D$:

$$(r,d) \sim (r', d') \iff rd' = dr'$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation

(e.g. $(r,d) \sim (s,e)$ und $(s,e) \sim (t,f)$ $\Rightarrow$ $+\begin{array}{l} re - sd = 0 \;|\times f \\ sf - te = 0 \;|\times d \end{array}$ ergibt

$(rf - td)e = 0$, e kein Nullteiler $e \neq 0$, also

$rf - td = 0$ muss sein, und damit

$rf = td$ also $(r,d) \sim (t,f)$ ∎).

<u>Notation.</u> Schreibe $\frac{r}{d} := [(r,d)]$ (die Äquivalenzklasse von (r,d)).

und setze $D^{-1}R :=$ die Menge der Äquivalenzklassen

→ Versehe $D^{-1}R$ mit den folgenden Ringoperationen:

$$\frac{r_1}{d_1} + \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1 d_2 + r_2 d_1}{d_1 d_2}$$ und

$$\frac{r_1}{d_1} \cdot \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1 r_2}{d_1 d_2}$$