# Algebra BIII

- Kuhlmann -

4. Vorlesung am 05. 11. 2012.

---

**Beh.** $D^{-1}R$ ist ein Ring mit Null $\frac{0}{1}$ und Eins $\frac{1}{1}$.

Wir zeigen z. B daß die Addition wohldefiniert ist.

Seien $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ z.z: $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$ab' = a'b$ $\quad\quad cd' = c'd$

$(ad+bc)\,b'd' \overset{?}{=} (a'd'+b'c')(bd)$

berechne $\quad\quad$ berechne

$\parallel$ $\quad\quad$ $\parallel$

$\underline{ab'}\,dd' + \underline{\underline{cd'}}\,bb' = \underline{a'b}\,dd' + \underline{\underline{c'd}}\,bb'$ ∎

✓

usw...

→ Die Abbildung

$$i: R \longrightarrow D^{-1}R$$
$$r \longmapsto \frac{r}{1}$$

definiert einen injektiven Ringhomo.

**Beweis:** $i(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow r = 0$. ∎

---

$\rightarrow \; i(D) \subset (D^{-1}R)^{\times}$

<u>Beweis</u> $d \in D$ ; $i(d) = \frac{d}{1}$ und damit $[i(d)]^{-1} = \frac{1}{d}$ ∎

<u>Definition</u> $D^{-1}R$ ist der Ring von Brüchen

<u>Beispiel 1.</u> $R$ integer $\Rightarrow D := R \setminus \{0\}$ erfüllt (*)

und so ist $D^{-1}R$ ein Körper, den wir

mit $\mathrm{Quot}(R)$ bezeichnen.

Wir identifizieren $R$ mit $i(R)$ (i.e $r$ mit $\frac{r}{1}$ $\forall r \in R$).

→ Wir haben erreicht: Jeder Integritätsbereich

läßt sich in einen Körper einbetten:

(<u>Erinnerung</u>: ein injektiver Ringhomo. heißt eine <u>Einbettung</u>).

<u>Korollar</u> : der Ring $R$ läßt sich gdw in einen Körper einbetten wenn er integer ist. ∎

<u>Beispiel 1</u> (a) $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

(b) $\mathrm{Quot}(K[X]) := K(X)$

der rationale Funktionenkörper einer Variablen über den Körper $K$.

**Beispiel 2.** $\underline{P}$ primideal ; $D = R \setminus \underline{P}$

$R_{\underline{P}} := D^{-1} R$ die Lokalisierung von $R$ nach $\underline{P}$.

mehr über **Beispiel 1 (b):** Polynomringe über Ringe.

Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.

$R[x] := \{ p(x) \mid p(x) \text{ Polynom über } R \}$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$n \in \mathbb{N}_0$ $\left[ \begin{array}{l} 0 \neq a_n := \text{Leitkoeffizient} \\ \deg p := n \end{array} \right.$

- Addition : Koordinatenweise (Koeffizientenweise)
- Multiplikation: wenn
  $p(x) = \sum a_i x^i$ und $q(x) = \sum b_j x^j$

so ist der Koeffizient von $x^k$ im Produkt

$p(x)\, q(x)$ gleich $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

**Bemerkungen:**

- $R \subseteq R[x]$ als der Teilring der konstanten

Polynome (i.e Polynome $p$ mit $\deg p = 0$).

**Frage:**

- Wann ist $a_n b_m$ Leitkoeffizient vom Produkt $p(x)\, q(x)$?

**Korollar**: $R$ integer gdw $R[x]$ integer.

Beweis. "$\Leftarrow$" Ein Teilring von einem Integritätsbereich ist integer.

"$\Rightarrow$" Sei $a_n \neq 0$ $b_m \neq 0$ für

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \quad \text{und} \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

dann ist $a_n b_m \neq 0$ weil $R$ integer ist (und damit ist auch $\deg p(x) q(x) = n + m$).
Insbesondere ist $p(x) q(x)$ nicht das Nullpolynom. ∎

Beispiel. Sei $R$ ein Ring, betrachte die Abbildung

$$ev_0 : R[x] \twoheadrightarrow R$$
$$p(x) \longmapsto p(0) = \text{der Konstanterterm von } p(x)$$

Dann ist $ev_0$ ein surjektiver Ringhomo. mit

$\ker ev_0 :=$ die Menge der Polynomen mit Konstanterterm gleich Null.

Also ist $R[x]/_{\langle x \rangle} \simeq R$ wobei

$\ker ev_0 = \langle x \rangle = \{ x f(x) \ ; \ f(x) \in R[x] \}$.

Sei nun $R = \mathbb{Z}$, so ist $\mathbb{Z}[x]/_{\langle x \rangle} \simeq \mathbb{Z}$

Wir sehen also : $\langle x \rangle$ ist Primideal in $\mathbb{Z}[x]$

aber ist nicht maximal !

$\blacksquare$