Lineare Algebra

10. Vorlesung 22. 11. 2011

– Kuhlmann –

<u>Kor 1.</u> Sei A $n \times n$ invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1}.

<u>Beweis.</u> Die elementare Z. U werden durch Multiplikation (links) mit elem. matriz erreicht: d. h

$$\underbrace{E_\ell \dots E_1}\, A = I_n$$

Aber dann gilt:

$$A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n. \blacksquare$$

<u>Beispiel 1.</u> $\left(A \;\middle|\; I_n \right) \longrightarrow \left(I_n \;\middle|\; A^{-1} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)Z_1 + Z_3]{(-2)Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1) Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3) Z_3 + Z_1]{3 Z_3 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2) Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

§1 Vektorräume.

Definition 1. Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen:

(i) $\cdot : K \times V \longrightarrow V$

$(c, v) \longmapsto cv$

(Skalarmultiplikation)

und

(ii) $+ : V \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

(Vektorsumme).

Das Tripel $(V, \cdot, +)$ ist ein <u>K-Vektorraum</u> (K-VR) oder <u>ein Vektorraum über K</u> (VR / K) falls die folgende Axiome erfüllt sind:

$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

$$1 \cdot \alpha = \alpha \qquad \forall \alpha \in V$$

$$\left.\begin{array}{l} (c_1 c_2)\alpha = c_1 (c_2 \alpha) \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2 \\ (c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall c_1, c_2 \in K \\ \forall \alpha \in V \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ c \in K \end{array}$$

Beispiel 1. $V = K^n$ mit koordinatenweise Verknüpfungen.

Beispiel 2:

Allgemeiner:

$$K^{m \times n} := Mat_{m \times n}(K) :=$$

die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit Koeff. aus K und Matrizensumme und Skalarvielfach.

Beispiel 3: Sei S eine Menge

$$V := \{ f ; \; f : S \to K ; f \text{ Abbild.} \}$$

$V := K^S$ mit Funktionensummen und Skalarvielfach.

Beispiele 1, 2 sind Sonderfälle von Beispiel 3.

Beispiel 4: Der VR der Polynomialefunktionen über K

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

$$c_i \in K$$

Beispiel 5: $K \mid k$ eine Körpererweiterung

Proposition 1:

für $c \in K$, $\alpha \in V$

(1) $c \cdot 0 = 0$

(2) $0 \cdot \alpha = 0$

(3) $c\alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$

(4) $(-1)\alpha = -\alpha$

∎

Definition 2. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$; $\alpha \in V$ ist

<u>lineare Kombination</u> davon wenn es

$c_1, \dots, c_n \in K$ gibt mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

Proposition 2

$$\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$$

$$c \sum c_i \alpha_i = \sum (c c_i) \alpha_i$$

∎