Lineare Algebra 25.11.2011
Kuhlmann
11. Vorlesung

(Dr. Merlin Carl in Vertretung).

Kapitel 2.

§2 Unterräume.

Definition 1. Sei V ein K-VR und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein <u>Teilraum</u> falls $(W, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfungen von V auf W i.e

$+ : W \times W \longrightarrow W$ und

$\cdot : K \times W \longrightarrow W$ sollen gelten

und die VR-Axiome auch).

Dazu sind nachzurechnen:

$0_V \in W$; $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$

$c \in K, \alpha \in W \Rightarrow c\alpha \in W$

(insbesondere $\alpha \in W \Rightarrow -\alpha \in W$)

Also es gibt ~~ein~~ ein facheres Kriterium:

Satz 1 Sei V ein K-VR, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V gdw für alle $\alpha, \beta \in W$, $c \in K$: $\alpha + c\beta \in W$. ∎

Beispiele (1) Ist V ein K-VR, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V.

(2) $V = K^n$

$W := \{(x_1, .., x_n) \in K^n \mid x_1 = 0\}$ ist Unterraum

aber

$X := \{(x_1, .., x_n) \in K^n \mid x_1 = 1 + x_2\}$ nicht !

(e.g $(0, .., 0) \notin X$).

(3) die symmetrischen $n \times n$ Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \le i, j \le n$)

Seien $A, B \in Sym_{n \times n}(K)$; $c \in K$

Dann ist

$$(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + c\,B_{ij}$$

$$= A_{ji} + c\,B_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji}$$

$$= (A + cB)_{ji}$$

Also $A + cB \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K)$ wie gewünscht. □

(4) <u>Sehr wichtiges Beispiel.</u>

Der Lösungsraum eines homogenen LGS:

A sei eine $m\times n$ Matrix über K.

Dann ist

$$\{x \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \mid Ax = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$.

Beweis Wir zeigen allgemeiner

Ist $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(K)$

$d \in K$, so ist

$$A(B + dC) = AB + dAC$$

Denn

$$[A(B+dC)]_{ij} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \; (B + d\, C)_{kj}$$

$$= \sum A_{ik} \; (B_{kj} + (d\, C)_{kj})$$

$$= \sum A_{ik} B_{kj} + \sum A_{ik} \; (d\, C)_{kj}$$

$$= \sum A_{ik} \; B_{kj} + \sum d\, A_{ik} \, C_{kj} =$$

$$(A\,B)_{ij} + d \sum A_{ik} C_{kj} =$$

$$(AB)_{ij} + d\,(AC)_{ij} \, . \qquad \blacksquare$$

Insbesonders:

Ist $A X_1 = A X_2 = 0$ so auch

$$A(X_1 + d X_2) = 0 \, . \qquad \blacksquare$$

Definition 2. Sei $\cancel{K}$ ein K-VR, $X \subseteq V$.

Eine Linearekombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v \in X} c_v \, v$

mit $c_v \in K$; wobei

$c_v = 0$ für alle bis auf endl. viele v.

Damit können wir nun definieren

<u>Definition 3</u>: Sei V ein K-VR, $X \subseteq V$.

Dann ist span(X), der von X

<u>aufgespannte</u> oder <u>erzeugte</u>

Unterraum, definiert als

span(X) :=

$$\left\{ \sum_{v \in X} c_v v \;\middle|\; c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } v \in X \right\}$$

<u>Konvention</u>: span$(\emptyset) = \{0\}$.

<u>Proposition</u>: Für jede $X \subseteq V$ ist span(X)

ein Unterraum

<u>Bew.</u> Span $\emptyset = \{0\}$ ✓

Sonst $X \neq \emptyset \Rightarrow$ span$(X) \neq \emptyset$

$\alpha, \beta \in$ span(X) etwa $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v$ $\quad \beta = \sum_{v \in X} d_v v$

sei $c \in K$:

also $\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + c d_v) v \in \operatorname{span}(X)$. ∎

Es ist sogar der „kleinste"

Unterraum der X enthält. Das ist

unser nächstes Ziel.

<u>Satz 2.</u> Sei V ein K-VR, $\mathcal{X}$ eine Menge

von Unterräumen.

Dann ist $\bigcap \mathcal{X}$ ein Unterraum von V.

<u>Beweis:</u> $\bigcap \mathcal{X} := \bigcap_{W \in \mathcal{X}} W$.

$0_V \in W$ für alle $W \in \mathcal{X}$ also $0_V \in \bigcap \mathcal{X} \neq \emptyset$

Sind $\alpha, \beta \in \bigcap \mathcal{X}$, $c \in K$, so sind für

jeden $W \in \mathcal{X}$ $\alpha, \beta \in W$, also

$\alpha + c\beta \in W$. Damit folgt

$\alpha + c\beta \in \bigcap \mathcal{X}$. ∎

Es sei nun für $X \subseteq V$

$\mathcal{L}(X)$ definiert als

$$\mathcal{L}(X) := \bigcap \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ ist Unterraum und } X \subseteq W \}.$$

Satz 3. Für $X \subseteq V$ ist $\mathcal{L}(X) = \operatorname{span}(X)$

Bew. $X = \emptyset$ $\quad \mathcal{L}(X) := \bigcap \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ Unterraum} \}$

$$= \{0\} = \operatorname{span}(\emptyset).$$

$X \neq \emptyset$

(1) $\mathcal{L}(X) \subseteq \operatorname{span}(X)$:

Es ist $\operatorname{span}(X) \subseteq V$ Unterraum und $X \subseteq \operatorname{span}(X)$.

Also $\operatorname{span}(X) \in \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ UR und } X \subseteq W \}$

Also $v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{ W \,/\, W \text{ UR und } X \subseteq W \}$

$$\Rightarrow v \in \operatorname{span}(X).$$

(2) $\operatorname{span}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$

Sei $v \in \operatorname{span}(X)$, $W \subseteq V$ UR und $X \subseteq W$

Da $v \in \operatorname{span}(X)$ ex. $(c_x;\ x \in X)$

$(c_x \in K$ für alle $x \in X)$

mit $v = \sum_{x \in X} c_x x$

wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endl. viele x.

Da W UR ist $\sum_{x \in X} c_x x = v \in W$
und $X \subseteq W$

Da W beliebig war, ist v Element jeden Unterraumes mit diesen Eigenschaften also auch des Durchschnittes. $\blacksquare$

Wir können auch mehrere UR zusammenfassen:

<u>Definition 4.</u> Seien $S_1, \dots, S_k \subseteq V$, V ein K-VR.

Dann ist

$$S_1 + \dots + S_k := \{x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in S_i;\ 1 \le i \le k\}$$

kurz auch $\sum_{i=1}^{k} S_i := \{\sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in S_i;\ 1 \le i \le k\}$

Korollar 4 Seien $W_1, \dots, W_k$ UR von V.

Dann ist $W := \sum_{i=1}^{k} W_i$

UR von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Bew. ÜA. $\square$

Korollar 5. Sind $W_1, \dots, W_k$ Unterräume von V, so ist

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right).$$

Bew: „$\subseteq$": Sei $v \in \sum W_i$

also ex. w_i ; $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $w_i \in W_i$ und

$v = \sum w_i$. Dann $w_i \in \bigcup_{j=1}^{k} W_j$ für

jedes $1 \leq i \leq k$.

Also $v = \sum w_i \in \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right)$.

„$\supseteq$" Sei $v \in \operatorname{span}\left(\bigcup W_i\right)$.

Dann ex $(c_i \; ; \; i \leq k)$ und $(w_i \mid i \leq k)$

mit $c_i \in K$; $w_i \in W_i$ so daß $v = \sum c_i w_i$

(**Bem**: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst

zusammenfassen !).

Da W_i UR sind, ist mit $w_i \in W_i$

auch $c_i w_i \in W_i$. Also ex.

$(w_i' \mid i \leq k)$ mit $w_i' \in W_i$ und

$$v = \sum w_i' \quad (\text{nämlich } w_i' := c_i w_i).$$

Also $v \in \sum W_i$ qed. $\blacksquare$

Beispiel Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ Teilkörper, ferner

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 := (1,2,0,3,0) \\ \alpha_2 := (0,0,1,4,0) \\ \alpha_3 = (0,0,0,0,1) \end{array}\right\} \in K^5$$

$\alpha \in \operatorname{Span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ gdw

ex. $c_1, c_2, c_3 \in K$ mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} c_i \alpha_i, \text{ also hat } \alpha \text{ damit}$$

die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$.

$\operatorname{Span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5;$
$x_2 = 2x_1,\ x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.