Lineare Algebra

– Kuhlmann –

12. Vorlesung . 29. 11. 2011

Kapitel 2 § 3 Basen und Dimension

Definition 1. Sei V ein K- VR.

$S \subseteq V$ ist <u>linear abhängig (l.a)</u> über K

falls ex. verschiedene $v_1, \dots, v_n \in S$

und skalaren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle Null

mit $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$.

S is linear <u>unabhängig</u> (l.u) über K

falls S nicht linear abhängig ist

(e.g. $\emptyset$ ist linear unabhängig).

Konvention $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich : wir sagen

$v_1, \dots, v_n$ l. u / l.a.

Bem:
1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a $\Rightarrow$ S_2 l.a also
2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l. u $\Rightarrow$ S_1 l.u

Beispiel 1. 3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l. a (weil $1.0=0$)

(ii) $\{v\}$ is l. a. gdw $v=0$

(iii) $\{v_1, v_2\}$ l. a gdw $v_1 = c v_2$ $c \in K$

4. S l. u. gdw jede endliche Teilmenge von S l. u, d. h gdw für verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in S$ und alle $c_1, \ldots, c_n \in K$ aus $\sum c_i v_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \le i \le n$.

Beispiel 2
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (3,0,-3) \\ v_2 &= (-1,1,2) \\ v_3 &= (4,2,-2) \\ v_4 &= (2,1,1) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0.v_4 = 0$$

$\Rightarrow$ l. a. über $\mathbb{R}$

Beispiel 3 Seien $\beta_1 = (1,1,2)$, $\beta_2 = (1,0,1)$, $\beta_3 = (2,1,3)$

Ist $\operatorname{Span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?

Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1,1,2) + c_2(1,0,1) + c_3(2,1,3)$$

d. h hat das LGS $\overset{?}{}$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= b_1 \\ c_1 \quad\quad + c_3 &= b_2 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= b_3 \end{aligned}$$

eine Lösung für jede $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

?

Satz 1 9. Vorlesung $\Rightarrow$

dies ist der Fall gdw $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

invertierbar ist. $\square$

Beispiel 4. $v_1 = (1, -2, 3)$ $v_2 = (5, 6, -1)$ $v_3 = (3, 2, 1)$

l. a ?

Betrachte $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

Also homogene LGS

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 5c_2 + 3c_3 &= 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

v_1, v_2, v_3 l. a gdw es nicht triviale Lösungen gibt

also v_1, v_2, v_3 l. u gdw

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ invertierbar ist (Satz 1 9. Vorl.).

Definition 2. Sei V ein K-VR.

Eine Basis für V ist eine l. u Teilmenge die V erzeugt.

V ist endlich dimensional falls es eine endliche Basis für V gibt.

i.e $S = \{v_1, -, v_n\} \subseteq V$ mit

(i) S l. u

(ii) $\text{span}(S) = V$.

Beispiel 5. $V = K^n$ die standard Basis ist

$\{e_i \; ; \; i = 1, .., n\}$ wobei $e_i = (0, .., 1, 0, 0)$

$\uparrow$

ite Stelle.

Satz 7 Sei V ein K-VK so daß V endlich erzeugt ist:

ex. $\beta_1, .., \beta_m \in V$ mit $\operatorname{span}(\{\beta_1, .., \beta_m\}) = V$.

Dann ist jede l. u Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Bew. Wir zeigen: hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente dann ist S l. a.

Seien $v_1, .., v_n \in S$; $n > m$

Span $S = V$ also $\forall j = 1, .., n$

$v_j \in \operatorname{span}(\{\beta_1, .., \beta_m\})$, also für $j = 1, ..., n$

ex. $A_{1j}, ..., A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der v_j; $1 \leq j \leq n$:

Für $x_1, \dots, x_n \in K$ berechne:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(A_{ij} x_j\right) \beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right) \beta_i \qquad (*)$$

Betrachte das homogene LGS in m Gleich. und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq m \qquad (**)$$

$n > m$ also Satz (7. Vorlesung Kor 2.)

impliziert es gibt nicht triviale Lösungen.

Also ex. $x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null

so daß $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \quad \forall \ 1 \leq i \leq m.$

Zurück in $(*)$ ergibt l. a. der v_j; $1 \leq j \leq n$. ∎

 29. 11. 2011