Lineare Algebra

Kuhlmann

13. Vorlesung 02. 12. 2011

Kapitel 2 § 3 Fortsetzung:

Korollar 1. Sei V endl. dim VR über K. Es gilt:
Jede Basen haben dieselbe Kardinalität.

Bew. Seien Basen
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \\ \\ \mathcal{B}_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right.$$
erzeugt / linear unabhängig ; l. u / erzeugt

Satz impliziert $n \leq m$ und auch
$m \leq n$; also $m = n$ ∎

Wir können nun eindeutig dim V definieren:

Definition 1. Sei V endl. dim. K-VR.

$$\dim V := |\mathcal{B}| \qquad \mathcal{B} \text{ eine Basis für } V.$$

Wir können nun den Satz umformulieren:

Korollar 2: Sei V endl. dim VR; $n := \dim V$.

(a) jede Teilmenge mit mehr als n Elementen

is l. a (eine l. u Teilmenge hat $\leq n$ Elemente).

(b) jede Teilmenge mit weniger als n Elementen
ist nicht erzeugend
(eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente).

Beispiel 1 (a) $V = \{0\}$ $\mathcal{B} = \emptyset$ $\dim V = |\emptyset| = 0$.

(b) $\dim K^n = n$ weil die standard Basis

$\mathcal{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ hat $|\mathcal{E}| = n$.

(c) $K^{m \times n} = Mat_{m \times n}$

hat Dimension mn: die mn Matrizen

mit eine 1 in der ij^{te} Stelle und 0 sonst

ist eine Basis.

Korollar 3 (d) $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f: \mathbb{N} \to K\}$

ist <u>nicht</u> endl. dim weil die Elemente:

$$f_i : \mathbb{N} \to K$$
$$f_i(n) := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

definieren eine unendliche l. u

Teilmenge, nämlich $S := \{ f_i \mid i \in \mathbb{N} \}$:

Seien $i_1 < \dots < i_k$

und $c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} = 0$ so

$$(c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k})(i_\ell) = c_\ell = 0$$

$\forall \ell = 1, \dots, k$.

__Lemma 1.__ (Fortsetzung Lemma). Sei V K-VR.

Sei S l. u in V und $\beta \notin \mathrm{span}(S)$.

Dann ist $S \cup \{\beta\}$ l. u.

__Bew__ Seien $c_1, \dots, c_m, b \in K$ mit

$$c_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_m \alpha_m + b\beta = 0$$

__Beh:__ $b = 0$ sonst $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \dots + (-c_m)\alpha_m$

$b \neq 0$

also $\beta = [(-c_1) b^{-1}] \alpha_1 + \dots + [(-c_m) b^{-1}] \alpha_m$

$\Rightarrow \beta \in \mathrm{span}(S)$ ↯

Also $b = 0$ also $\sum c_i \alpha_i = 0$ und S l. u $\Rightarrow c_i = 0$

$1 \le i \le m$. ∎

Satz 1. Sei V endl. dim K-VR und

$W \subseteq V$ UR.

Jede l. u Teilmenge von W ist endlich

und is Teil einer (endl.) Basis für W.

Bew sei $S \subseteq W$ l. u. und beobachte:

$S \subseteq V$ is l. u also $|S| \leq \dim V$.

Sei nun $S_0 \subseteq W$ l. u.

Wir setzen S_0 zu einer Basis fort wie

folgend:

betrachte $\mathrm{span}(S_0) \underset{UR}{\subseteq} W$.

- Falls $=$ ✓

- Falls $\subsetneq$ sei $\beta_1 \in W$; $\beta_1 \notin \mathrm{span}(S_0)$

setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$ l. u (Lemma 1).

wiederhole: $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$ l. u, usw.

In höchstens $\dim V$ viele Schritte erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, .., \beta_m\}$ wofür

$\mathrm{span}(S_m) = W$ sein muss!

Ferner S_m l. u also S_m Basis für W. ☒

<u>Korollar 4</u>. Sei W ein <u>echter</u> UR vom endl. dim K-VR V. (i.e $W \subsetneq V$).

Dann ist W endl dim und $\dim W < \dim V$.

Bew: Setze $S_0 = \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz; wir erhalten eine Basis S_m von W; $\mathrm{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ viele Schritte.

Also $m := \dim W \leq \dim V$.

Aber W echt; ex. $\beta \notin W$ ie $\beta \notin \mathrm{Span}(S_m)$.

Also $S_m \cup \{\beta\}$ l. u; so $m+1 \leq \dim V$

also $m < \dim V$. $\blacksquare$

<u>Korollar 5.</u> Sei V endl. dim VR über K.

Jede l. u Teilmenge ist Teil einer Basis. $\blacksquare$

<u>Korollar 6.</u> Seien W_1, W_2 endl. dim. K-VR.
($W_1 \subseteq V$ und $W_2 \subseteq V$ UR.)

Es gilt

$W_1 + W_2$ ist endl. dim und

$\dim W_1 + \dim W_2 =$

$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

<u>Bew:</u> Satz und Korollare implizieren
$W_1 \cap W_2$ hat endl. Basis

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$;

und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$ Basis für W_1

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ Basis für W_2

für geeignete $\underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}_{\in W_1}$, $\underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}_{\in W_2}$.

Der UR $W_1 + W_2$ wird von

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \,;\; \beta_1, \dots, \beta_m \,;\; \gamma_1, \dots, \gamma_n$

erzeugt.

<u>**Beh**</u>: diese Vektoren sind l.u.

<u>Bew</u>: $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \gamma_r = 0$ (*)

$\Rightarrow \quad -\sum z_r \gamma_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j$

Also $\sum z_r \gamma_r \in W_1$. Aber auch

$\in W_2$ per Definition

also $\in W_1 \cap W_2$.

Also $\sum z_r \gamma_r = \sum c_i \alpha_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_k \in K$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ l.u $\Rightarrow z_r = 0$ $\quad 1 \le r \le n$

Also $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$ in (*)

und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ l.u $\Rightarrow$

$x_i = 0$ und $y_j = 0$ $\quad 1 \le i \le k$, $\quad 1 \le j \le m$ $\square$

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k+m) + (k+n) = k + (m+k+n)$. $\square$