Lineare Algebra

– Kuhlmann –

14. Vorlesung. 06.12.2011.

Kapitel 2. § 4 Koordinaten.

Definition 1. Sei V endl. dim. K-VR. ; $\dim V = n$

Eine <u>geordnete Basis</u> ist ein n-Tupel

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$

so daß $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis.

Notation und Terminologie:

Wir schreiben $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine

geordnete Basis (wir werden nicht

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ schreiben).

Lemma 1. Sei V endl. dim. K-VR ; $\alpha \in V$,

ex. eindeutiges n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$

mit $$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

Bew: $\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)\, \alpha_i = 0$

$\Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i \qquad 1 \leq i \leq n$. ▣

Definition 2. (1) x_i ist die i^{te} Koordinate von α bzgl $\mathcal{B}$

(2) $(x_1, .., x_n)$ ist das Koordinaten Tupel von α bzgl $\mathcal{B}$.

Definition 3 V, W K-VR

(1) $T : V \longrightarrow W$ ist eine lineare Abbildung (oder Transformation) falls:

(i) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(ii) $T(c\alpha) = c\,T(\alpha)$

$\alpha, \beta \in V$; $c \in K$

oder äquivalent

(iii) $T(c\alpha + \beta) = c\,T(\alpha) + T(\beta)$.

Bem: $\left.\begin{aligned} T(0) &= T(0+0) \\ &= T(0) + T(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow T(0) = 0$. ▣

(2) T eine <u>Isomorphie</u> oder ein <u>Isomorphismus</u> falls T ferner bijektiv ist.

<u>Notation:</u> $V \overset{T}{\simeq} W$

oder $V \simeq W$

<u>Terminologie</u> V und W sind Isomorph.

<u>Lemma 2.</u> Sei T lineare Transformation.

Dann ist T injektiv gdw

$\forall \alpha \, (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Bew. "$\Rightarrow$" T injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$ also $\alpha = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ dann

$T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$; i.e $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$

also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. ⊡

Satz. $\left.\begin{array}{l}\dim V = n \\ V \quad K\text{-VR}\end{array}\right\} \Rightarrow V \cong K^n$

Beweis Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geord. Basis

definiere

$$T : V \longrightarrow K^n$$

$$\alpha \longmapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$$

$:=$ koordinaten Tupel von α bzgl $\mathcal{B}$

$T(\alpha + \beta) \overset{?}{=} T(\alpha) + T(\beta)$

Sei $\alpha = \sum x_i \alpha_i \qquad \beta = \sum y_i \alpha_i$

$\alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow$

$T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) =$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$

Anlog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$

$T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$ weil $x_1 = \dots = x_n = 0$

so T injektiv.

- Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$

setze $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$

Es gilt: $T(\alpha) = (x_1, \ldots, x_n)$

so T surjektiv. $\boxtimes$

Notation:

Koordinaten Spaltenmatrix von α

bzgl $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad \boxtimes$$
