- Lineare Algebra -

- Kuhlmann -

15. Vorlesung 9. 12. 2011.

Beispiel 1. $V = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = (1,2,1) \\ \alpha_2 = (2,9,0) \\ \alpha_3 = (3,3,4) \end{array}\right\}$$ eine Basis weil

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ invertierbar

Finde (i) $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

und finde

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$

zu (i): $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

zu (ii) finde x_1, x_2, x_3 mit

$\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i \alpha_i$ d.h

$$(5,-1,9) = x_1(1,2,1) + x_2(2,9,0) + x_3(3,3,4)$$

Löse LGS:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -1$$

$$x_1 \qquad + 4x_3 = 9.$$

Lösung $x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Zusammenhang zwischen

$[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$

für $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geord. Basen?

<u>Bem.</u> $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \iff [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$. $\boxminus$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $\qquad \mathcal{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$

schreibe $\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$ $\qquad P_{ij} \in K$ eindeutig

d.h. $[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$

9. 12. 2011

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig

und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

also $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j' \alpha_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \alpha_i$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij} x_j') \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_j' \right) \alpha_i$. (*)

Es folgt aus (*) dass die ite Koordinate von α bzgl $\mathcal{B}$ ist

(**) $\quad x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_j' \qquad 1 \leq i \leq n$

Sei P die $n \times n$ Matrix mit ijten Koeffizient P_{ij}; wir schreiben (**) um:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P [\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad \text{d.h}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} P_{1j} x_j' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} P_{nj} x_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

9.12.2011

Ferner aus

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$$

folgt daß das homogene LGS

$$PX' = 0$$

nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat,

also ist P invertierbar.

Wir bekommen also dual

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Wir haben bewiesen:

Satz 1. Sei $\dim(V) = n$ über K.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geord. Basen;

P die eindeutig definierte invertierbare

Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha_j']_{\mathcal{B}}$

für $j = 1, \ldots, n$,

Es gelten:

9.12.2011

$\forall \alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$. $\boxed{}$

<u>Satz 2.</u> Sei P $n \times n$ invertierbar (über K)

V n-dim K-VR

$\mathcal{B}$ geord Basis.

Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) Basis $\mathcal{B}'$ von V so daß $\forall \alpha \in V$:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Bew: Wenn $\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha_j']_{\mathcal{B}'} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$$

J. 9.12.2011

also $\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, \alpha_i$

Nun zeigen wir daß die so definierte α_j' eine Basis bilden.

Sei $Q := P^{-1}$. Wir berechnen:

$$\sum_j Q_{jk}\, \alpha_j' = \sum_j Q_{jk} \sum_i P_{ij}\, \alpha_i$$

$$= \sum_j \sum_i P_{ij}\, Q_{jk} \quad \alpha_i$$

$$= \sum_i \underbrace{\left(\sum_j P_{ij}\, Q_{jk} \right)}_{(PQ)_{ik}} \alpha_i$$

$$= \sum_i (\delta_{ik})\, \alpha_i = \alpha_k \quad , \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

Also $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$

So $\operatorname{Span}(\mathcal{B}') = V$ $\square$

(siehe HL 1 und HL 2).

üB 8

<u>Hilfslemma 1:</u> $\dim V = n$

$X \subseteq V$ $\quad |X| = n$ und X l. u $\Rightarrow$

X eine Basis

<u>Hilfslemma 2:</u> $\dim V = n$

$X \subseteq V$ $\quad |X| = n$ und X erzeugt $\Rightarrow$

X eine Basis.

<u>korollar:</u> P $n \times n$ ist invertierbar

$\Leftrightarrow$

Die Spalten von P sind l. u. in K^n

<u>Beweis:</u> $P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P X = 0$ hat nur die triviale

Lösung $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0$

eine triviale lineare Kombination ist,

wobei P_i die ite Spalte von P ist. $\blacksquare$

<u>korollar:</u> P $n \times n$ ist invertierbar, $\dim(V) = n$

gdw

die Spalten von P bilden eine Basis für V. $\blacksquare$

Beispiel Eine parametrische Familie von geord. Basen.

$K = \mathbb{R}$ $\qquad \theta \in \mathbb{R}$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

invertierbar mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

So für jede $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_\theta := \{ (\cos\theta, \sin\theta) \, ; \, (-\sin\theta, \cos\theta) \}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^2$.

Sei $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boxminus$