Lineare Algebra

\- Kuhlmann -

16. Vorlesung 13. 12. 2011

Erinnerung (i) $y = [y_1 \ \dots \ y_m]$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \qquad \alpha_i : i^{te} \text{ Zeile}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \dots + y_m\alpha_m$.

(ii) i^{te} Zeile von $BA =$
$[i^{te}$ Zeilenmatrix von $B]$ A $=$

$$[B_{i1} \dots B_{in}] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \underset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j$$

$1 \leq i \leq n$.

Also ist die i^{te} Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 1. A $n \times n$ über K, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Zeilen vektoren von A l. u $\Rightarrow$ A invertierbar

Beweis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe

standard Basis vektor: $e_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j \qquad 1 \leq i \leq n$

Sei B die $n \times n$ Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten.

Betrachte die Matrix BA.

die i^{te} Zeile von BA = [i^{te} Zeile von B] A

i.e. $(B_{i1} \ldots B_{in})A = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \alpha_j = e_i$

Also $BA = I_n$. $\blacksquare$

Für die Umkehrung siehe ÜB.

---

§ 2.5 Zeilenraum.

Definition 1. Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ Zeilen von A.

Der Zeilenraum von A ist $\mathrm{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \underset{UR}{\subseteq} K^n$

Der Zeilen~~rang~~ von A ist die Dimension davon.

Satz 1 Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

Beweis $B = PA$ $\quad P$ invertierbar $\quad A, B$ $m \times n$

A $m \times n$ $\quad B$ $m \times n$
P $m \times m$

So $B = PA$ $\leftarrow$ jede B-Zeile l. K von A-Zeilen
also $A = P^{-1}B$ $\leftarrow$ " A-Zeile l. K " B-Zeilen

Also ~~jede~~ B-Zeile im $\operatorname{span}\{\alpha_1, -, \alpha_m\}$
und umgekehrt

Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B. ☒

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 1 zeigen. ...

Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r. Z. S. F

Satz 2. Sei $R \neq 0$ in r. Z. S. F.
Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R.
(also Zeilenrang von R = # der Zeilen die ungleich 0 sind)

Beweis. Seien $\rho_1, \dots, \rho_r$ die Zeilen $\neq 0$

$$R = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es ist klar daß $\rho_1, \dots, \rho_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun l. u. (Analog Beispiel 1 (d) in 13. Vorlesung).

Seien $k_1 < \dots < k_r$ die Spalten Indexe (wo die Haupteinse der ρ_i erscheinen)

$$c_1 \rho_1 + \dots + c_r \rho_r =$$

$$c_1 (0 \dots \underset{k_1}{1}, \dots, 0) + c_2 (\dots 0, 0, \underset{k_2}{1}, \dots 0) + \dots +$$

$$c_r (0, \dots, 0, \underset{k_r}{1}, \dots 0) = (0, \dots, 0)$$

impliziert $c_1 = \dots = c_r = 0$. ∎

Hilfslemma ~~Lemma~~. Seien R und R' $m \times n$ in r. Z. S. F.

Es gilt: R und R' haben denselben Zeilenraum impliziert $R = R'$

Beweis $k_1 < \dots < k_r$ $\rightarrow$ Haupteins Spalten | $k_1' < \dots < k_r'$ Index wie oben $\leftarrow$

Beobachte: ρ_i ist l. K von $\{\rho_1', \dots, \rho_r'\}$ gdw $k_i = k_i'$ $\forall i = 1, \dots, r$. ∎

Satz 3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.
Sei W ein U. R. von K^n;
$\dim W \leq m$.

Es gilt: $\exists!$ $m \times n$ matrix in r. z. S. F R

mit ~~Z~~Zeilenraum $R = W$.

Beweis. $\exists$: $\dim W \leq m$. Seien
$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ $\quad \operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = W$

setze $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ Matrix

Zeilenraum $A = W$.

A z. ä. zu R in r. z. S. F

und Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R = W$.

Eindeutigkeit: Sei R' eine Matrix in r. z. S. F
mit
Zeilenraum $R' = W$.

Also dann gilt: Zeilenraum R = Zeilenraum R'

$\Longrightarrow$ $R = R'$. $\blacksquare$

H. L.

Korollar 1. Jede $m \times n$ Matrix ist Zeilenäquiv. zu einer **eindeutige** Matrix in r.Z.S.F.

Beweis. A z.ä. zu R
A z.ä. zu R'

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Zeilenraum } R = \text{Zeilenraum } A = \text{Zeilenraum } R'}$

$\Rightarrow$ $R = R'$. $\blacksquare$

Korollar 2. A, B $m \times n$ über K

Es gilt: A z.ä. zu B
gdw
Zeilenraum A = Zeilenraum B.

Beweis. "$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{aligned} &\text{Zeilenraum } A = \text{Zeilenraum } R \\ = &\text{Zeilenraum } B = \text{Zeilenraum } R' \end{aligned}\right\} \Rightarrow R = R'$

Also $\underbrace{A \text{ z.ä. zu } R \text{ und } B \text{ z.ä. zu } R}$
$\Downarrow$
A z.ä. zu B. $\blacksquare$

Korollar 3. A, B $m \times n$ Matrizen über K.

Folgende sind äquivalent:

(1) A und B sind z. ä.

(2) A und B haben denselben Zeilenraum

(3) $B = PA$ P invertierbar $m \times m$. $\square$

(I) **Zusammenfassung:** Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim. von Zeilenraum von A

- Reduziere A zu R in r. Z. S F
- eine Basis für Zeilenraum A =

$\{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ (die nicht Null Zeilen von R).

(II) Nun betrachten wir den Lösungsraum $\underset{u.R}{\subseteq} K^n$

zu $AX = 0$ wobei A $m \times n$

Setze $S :=$ Lösungsraum.

Wir berechnen eine Basis und die Dimension

- Reduziere A zu R in r. Z. S. F

S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$

- Seien $\rho_1, \dots, \rho_r$ die nicht Null zeilen von R
$k_1, \dots, k_r$ die spalten Indexe wo die Haupteins der Zeilen erscheinen

Erinnerung: Lösungsverfahren:

$\{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen

$J = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$

$\{x_j \; ; j \in J\}$ freie Variablen, $|J| = n-r$

Löse:

$$\left.\begin{aligned} x_{k_1} &= \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{aligned}\right\} (*) \qquad \begin{aligned} &c_{ij} \in K \\ &1 \leq i \leq r \\ &j \in J \end{aligned}$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen <u>beliebige</u> Werte für x_j; $j \in J$.

- Also sei E_j die Lösung die man bekommt durch Einsetzen

$x_j = 1$ und $x_i = 0 \;\forall i \in J \setminus \{j\}$.

Beh. Die $(n-r)$ Vektoren

$$\{E_j \;;\; j \in J\}$$

sind eine Basis für S.

Bew: (1) l. u wie oben

(die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j^{the} Zeile und 0 in den anderen Zeilen die durch Elementen aus J indiziert sind).

(2) Erzeugen: folgt aus $\circledast$.

Details: Ü. A. Also $\{E_j \;;\; j \in J\}$ Basis.

Es gilt also: $\dim S = n - r$.

$\boxminus$