– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

– 17. Vorlesung – 16. 12. 2011

Kapitel 3. Lineare Transformationen.
Fortsetzung.

Beispiel 1. (i) $T = 0$
(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identitäts.

Beispiel 2. $V :=$ Poly. Fkt. über K

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$$

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + k c_k x^{k-1}$$

Ableitung Operator

Beispiel 3. (a) $T : K^{n \times 1} \longrightarrow K^{m \times 1}$

Sei A $m \times n$ über K

$$T(X) := AX$$

(b) $U : K^m \longrightarrow K^n$

$$U(\alpha) = \alpha A.$$

Beispiel 4: P $m \times m$
Q $n \times n$

$$T: K^{m\times n} \longrightarrow K^{m\times n}$$

$$T(A) := P A Q$$

ist linear Operator.

Beispiel 5. $V = \{ f ; \underset{\text{stetig}}{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}} \}$

$$T: V \longrightarrow V$$

$f \longmapsto Tf$, wobei

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt.$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Bem 1: Lineare Abbildungen erhalten l. K:

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, T(\alpha_j).$$

Satz 1. Sei V endl. dim. V. R $\mid K$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geord. Basis für V.

Seien $\beta_1, \dots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.

$\exists! \quad T: V \longrightarrow W \quad l. A$

mit $\quad T(\alpha_j) = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n \quad (*)$.

Beweis. $\exists$ Z: Sei $\alpha \in V$

$$\alpha = \sum x_j \alpha_j$$

Definiere

$$T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$$

Insbesondere ist $(*)$ erfüllt.

Ist T linear?

Sei $\gamma = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n \quad ; \quad c \in K$

$$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$$

Also:

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \dots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= [cx_1\beta_1 + y_1\beta_1] + \dots + [cx_n\beta_n + y_n\beta_n]$$

$$= (cx_1\beta_1 + \dots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n)$$

$$= c(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n)$$

$$= c\,T(\alpha) \quad + \quad T(\gamma).$$ ✓

Eindeutigkeit.

Seien $T, U : V \longrightarrow W$ linear

mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$

z.z: $T(\alpha) = U(\alpha) \quad \forall \alpha \in V$

Berechne:

$$U(\alpha) = U\left(\sum c_j \alpha_j\right) = \sum c_j \cdot U(\alpha_j)$$

$$= \sum c_j \, T(\alpha_j) = T\left(\sum c_j \alpha_j\right) = T(\alpha). \blacksquare$$

Bem 1. Wir haben gezeigt:

① $T, U : V \longrightarrow W$ l. A

Es gilt: $T = U$ gdw $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ $\quad 1 \leq j \leq n$

für eine Basis von V

$\{\alpha_j ; \quad 1 \leq j \leq n\}$.

② Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 6. $V = \mathbb{R}^2$ $W = \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = (1,2) \\ \alpha_2 = (3,4)\end{array}\right\} \text{ Basis für } V$$

$\beta_1 = (3,2,1)$

$\beta_2 = (6,5,4)$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(1,2) = (3,2,1)$$

$$T(3,4) = (6,5,4)$$

$T(e_1) = ?$

$$e_1 = (1,0) = (-2)(1,2) + (3,4)$$

$$T(e_1) = (-2)(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2). \quad \blacksquare$$

Beispiel 7 (mehr dazu in Abschnitt 3.4).

$T : K^m \rightarrow K^n$ ist eindeutig bestimmt

durch $T(e_i) := \beta_i \quad i = 1, \dots, m$

$\beta_i \in K^n$

Sei $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$

$$T(\alpha) = x_1 \beta_1 + \dots + x_m \beta_m$$

Setze $$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_m) \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

berechne

$$\alpha B = (x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = x_1 \beta_1 + \dots + x_m \beta_m$$

$1 \times m$ $\quad$ $m \times n$ $\quad$ $1 \times n$

Also $T(\alpha) = \alpha . B$ $\blacksquare$

Bild und Nullraum (Kern).

Lemma 8 sei $T : V \to W$ l. A.

(1) $T(V) := R_T = \{ T(\alpha) ; \alpha \in V \}$

$= \{ w \mid w \in W \text{ und } \exists \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w \}$

ist ein U-R. von W

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0 \}$

$N := \ker(T)$ ist ein U.R. von V

Beweis:

(1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T$; $c \in K \Rightarrow$

$$c\beta_1 + \beta_2 \in R_T \ ?$$

$\beta_1 = T(\alpha_1) \qquad \beta_2 = T(\alpha_2)$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$ ✓

$T(0) = 0 \in R_T$ also $R_T \neq \emptyset$

R_T U.R.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c \cdot 0 + 0 = 0$

also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$.

Auch $0 \in N$ so $N \neq \emptyset$. ∎

---

sei V endl. dim ; $T: V \to W$ l.A

Definition: $\operatorname{rang}(T) := \dim R_T$.

∎
