– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

– 18. Vorlesung – 20.12.2011

Bemerkung. V endl. dim $T: V \to W$ l. A

Es gilt: $R_T = T(V) \underset{UR}{\subseteq} W$

ist endlich erzeugt, weil:

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V

$$T(\alpha) = T\left(\sum c_i \alpha_i\right) = \sum c_i \, T(\alpha_i)$$
$$:= \sum c_i \, \beta_i$$

$\alpha \in V$

$\Rightarrow$ $T(\alpha) \in \operatorname{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Also $R_T = \operatorname{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. $\square$

Satz 1. V endl. dim $T: V \to W$

Es gilt: $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \operatorname{rang} T$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N := \operatorname{Ker} T$

Sei $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in K$ s.d. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$

eine Basis für V.

Beh: $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis

für R_T.

Beweis: Bem 1 $\Rightarrow$ $\{\underbrace{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$

erzeugen R_T

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T.

Sei nun $\sum_{i=k+1}^{n} c_i \left(T(\alpha_i)\right) = 0$

also $T\left(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha_i}_{:=\alpha}\right) = 0$

Also $\alpha \in N$, es ex. $b_1, \dots, b_k$

mit $\alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i$

Also: $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{n} c_j \alpha_j = 0$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ l. U $\Rightarrow$ $b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$

 20.12.2011

Bsp: A $m \times n$

$$T_A : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$$

$$T_A(X) := AX.$$

$\operatorname{Ker} T_A$ = Lösungsraum $AX = 0$

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m\times 1};\ \exists X : AX = Y\} \quad (*)$$

Seien $A_1, \dots, A_n$ Spalten von A

Also $(*)$ ergibt: $Y \in R_{T_A}$ gdw

$\exists X$: $Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$

Also

R_{T_A} = Spaltenraum von A

und

$\operatorname{Rang}(T_A)$ = Spaltenrang von A. $\blacksquare$

<u>Wobei</u>: spaltenraum := span$\{A_1, \dots, A_n\}$

spaltenrang := dim Spaltenraum.

§ 3.2 Die Algebra der lin. Transf.

Seien V, W V-R $\mid K$

Wir haben gesehen

$$Fkt(V, W) = \{ f \mid f : V \to W \text{ eine Funktion} \}$$

versehen mit Fkt. Addition und
Skalar Multiplikation
ist ein K-V.R.

Satz 2. Setze $\underset{:= L}{L(V, W)} := \{ T \mid T : V \to W \text{ lineare Ab.} \}$

mit Addition

$$(T+U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha) \qquad T, U \in L$$

$$(d\,T)(\alpha) := d\,(T(\alpha)) \qquad d \in K$$

Es gilt: $T + U \in L(V, W)$

und $dT \in L$.

Beweis $(T+U)(c\alpha+\beta) \underset{\text{üA}}{=} c(T+U)(\alpha) + (T+U)(\beta)$

$$(dT)(c\alpha+\beta) = d\,T(c\alpha+\beta) = d\,(cT(\alpha) + T(\beta))$$

$= c\, d\, T(\alpha) + d\, T(\beta)$

$= c\,[\, dT(\alpha)\,] + (dT)\,(\beta)$. ∎

Bem: $0 \in L(V, W)$; $L(V,W) \neq \emptyset$

Also $\underset{UR}{L(V, W) \subseteq Fkt(V, W)}$.

Insbesondere ist $L(V, W)$ ein K-V.R.

Satz 3. V n-dim, W m-dim über K

Then $\dim L(V, W) = mn$

Beweis: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geord. Basis V

$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ geord. Basis W

For each (p, q) $\quad 1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$

define $E^{p,q}$ lin. Ab.

$E^{p,q} : V \longrightarrow W$ defeniert für $j = 1, \dots, n$

$$j = 1, \dots, n:\ E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq}\, \beta_p$$

Beh: $\{ E^{p,q} \; ; \; 1 \leq p \leq m \; ; \; 1 \leq q \leq n \}$

bilden eine Basis für L.

Bew Sei $T : V \to W$, für $1 \leq j \leq n$

Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p$ in $\mathcal{B}'$

für $A_{pj} \in K$

Zwisch.Beh:

$$\underbrace{T = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:= U}$$

weil

$$U(\alpha_j) = \left(\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} \right) (\alpha_j)$$

$$= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p$$

$$= \sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p = T(\alpha_j).$$

also $U(\alpha) = T(\alpha) \quad \forall \alpha \in V$

also $U = T$.

Also $\{E^{p,q}\ ;\ 1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n\}$

erzeugen. L

Linear unabh.?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$

für $A_{pq} \in K$

Also für α_j ; $j = 1, \ldots, n$ gilt

$U(\alpha_j) = 0$ i.e

$$\sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p = 0$$

Nun $\{\beta_p\ ;\ 1 \leq p \leq m\}$ l. u $\Rightarrow$

$A_{pj} = 0$ für alle p und j ∎

~~Definition~~ Satz 4:

Seien V, W, Z V.R | K

T, U lin. Ab.

$V \xrightarrow{T} W \qquad W \xrightarrow{U} Z$

 20.12.2011

Es gilt

$$V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

is wieder linear.

Bew: $(U \circ T)(c\alpha + \beta) =$

$U(T(c\alpha + \beta)) =$

$U(cT(\alpha) + T(\beta))$

$= cU(T(\alpha)) + U(T(\beta))$

$= c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$. $\blacksquare$

Sonderfall: $V = W = Z$ Also:

$L(V, V)$ hat eine Vektorenmultiplik.

$U \cdot T := U \circ T$.

Bezeich. Schreibe $T^0 := I$ Identitätsab.

$T^2 := T \circ T$

$\vdots$

$T^n := T \circ \cdots \circ T$

Definition:

Sei K Körper, eine lineare algebra L über K ist ein K-V.R versehen mit Vektorenmult. so daß

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

$\Bigg\}\ \forall\, \alpha,\beta,\gamma \in L$

(c) $\forall\, c \in K$

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$$

Falls ex. $1 \in L$ mit

(d) $1 . \alpha = \alpha . 1 = \alpha \quad \forall\, \alpha \in L$

heißt L eine l. A. mit Einheit.

(e) Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ heißt L kommutativ.

$\forall\, \alpha, \beta \in L$

Lemma $L(V,V)$ ist eine K-lineare Algebra mit Einheit

i.e. es gelten

(a) $I \circ U = U \circ I = U$

(b) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$

$(T_1 + T_2)U = T_1 U + T_2 U$

(c) $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$.

Bew. (a) ✓

(b):

$$U(T_1+T_2)(\alpha) = U(T_1+T_2(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha))$$

$$= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha).$$

Auch: $[(T_1+T_2)U](\alpha) = (T_1+T_2)(U(\alpha))$

$$= T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) = (T_1 U + T_2 U)(\alpha).$$

(c) analog. $\boxminus$