- Lineare Algebra -

- Kuhlmann -

19. Vorlesung

Am 10.01.2012

<u>Definition 1.</u> Sei $T : V \longrightarrow W$ eine Abbildung.

T ist <u>invertierbar</u> wenn es eine Abbildung $\mathcal{U}$ gibt mit

$$\mathcal{U} : W \longrightarrow V \quad \text{und}$$

$$\mathcal{U} \circ T = Id_V \quad \text{und} \quad T \circ \mathcal{U} = Id_W$$

(wobei Id die Identitätsab. bezeichnet:

$$Id(x) = x \qquad \forall x)$$

<u>Lemma 1.</u> T invertierbar $\Longleftrightarrow$ T ist bijektiv

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" 1) $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (\mathcal{U} \circ T)(x_1) =$

$\mathcal{U}(T(x_1)) = \mathcal{U}(T(x_2)) = (\mathcal{U} \circ T)(x_2) = x_2$, injektiv ✓

2) $(T \circ \mathcal{U})(y) = y$ also $y = T(\mathcal{U}(y))$ surjektiv ✓

$\forall y \in W$

"$\Leftarrow$" T bijektiv $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in W \; \exists! \; x \in V$ mit $T(x) = y$

Setze $\mathcal{U}(y) := x$ also $\mathcal{U}: W \longrightarrow V$ wird eindeutig definiert durch

$$\mathcal{U}(y) = x \iff T(x) = y.$$

Berechne: $\mathcal{U}(T(x)) = ?$ setze $y := T(x)$

also $\mathcal{U}(T(x)) = x$. Analog $T(\mathcal{U}(y)) = y$

also $\mathcal{U} \circ T = Id_V$ und $T \circ \mathcal{U} = Id_W$ $\blacksquare$

<u>Bezeichnung</u>: T invertierbar $\Rightarrow \mathcal{U}$ ist eindeutig definiert, schreibe $\mathcal{U} := T^{-1}$

Also $T^{-1}(y) = x \iff y = T(x)$.

<u>Satz 1</u>: T linear und invertierbar
$\Rightarrow T^{-1}$ " " "

<u>Beweis</u>: $\underbrace{T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2)}_{:= Y} \overset{?}{=} \underbrace{c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:= X}$

$T^{-1}(Y) = X \iff T(X) = Y$ Also

Berechne:

$$T(X) = T\left(c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)\right) = c\,T\left(T^{-1}(\beta_1)\right) + T\left(T^{-1}(\beta_2)\right)$$
$$= c\,\beta_1 + \beta_2 \quad \blacksquare$$

Satz 2. Es seien: $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$

invertierbare Abbildung   invertierbar Abbildung

Dann ist $L \circ G : V \longrightarrow Z$ invertierbar

und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$

Beweis $(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) =$

$G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G$

$= G^{-1} \circ G = I$. Andere: Analog ▣

Definition und Bezeichnung 2

$GL_K(V) := \{ T \mid T : V \to V$ invertierbare lineare Abbildung$\}$

Bemerkung: Wir haben gerade gezeigt daß $GL_K(V)$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist. $GL_K(V)$ ist die allgemeine lineare Gruppe (general linear group).

Definition 3. T ist singulär falls $\ker(T) \neq \{0\}$

Sonst heißt T regulär oder nicht singulär

Also T regulär bedeutet: $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Satz 3 $T: V \longrightarrow W$ ist regulär $\Longleftrightarrow$

T bildet eine lin. unab. Teilmenge von V auf " " " " von W.

Beweis "$\Longrightarrow$" Sei $\ker(T) = \{0\}$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ l. u. in V. Z. Z: $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)$ l. u.

Sei $c_1 T(\alpha_1) + \cdots + c_k T(\alpha_k) = 0$ also

$T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = 0$ also

$c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k \in \ker(T)$

also $c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ l. u

$\Rightarrow$ $c_1 = \cdots = c_k = 0$. ∎

Korollar 4. Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$

$T: V \longrightarrow W$ l. A.

Es gilt: T ist injektiv $\Longleftrightarrow$ T ist surjektiv.

Beweis. Wir wenden Dimensionssatz (Satz 1, 18. Vorlesung) an.

$d = \operatorname{rang}(T) + \dim \ker(T)$. Also

T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow$
$\operatorname{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$ surjektiv. ∎