– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

20. Vorlesung am

Freitag 13. 01. 2012.

Kapitel 3 § 3.4 Matrix Darstellung von lin. Transf.

<u>Ansatz</u>: Seien V, W K-VR mit $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$.

$T: V \longrightarrow W$ lin. Abb.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geord. Basis für V und

$\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_m'\}$ " " " W.

<u>Definition 1.</u> T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$.

Schreibe $$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := \left([T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Diese $m \times n$ Matrix heißt die <u>Matrix Darstellung</u>

von T bezgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

Satz 1. Es gilt: für $\alpha \in V$

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} [\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

Bew.: Setze: $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$ also ist $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \alpha_i'$

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\alpha_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \alpha_i' = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right) \alpha_i'$$

Es folgt: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj} x_j \end{pmatrix}$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ wie beh.} \quad \blacksquare$$

Bemerkung: $(*)$ bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig!

Bsp 1. Sei A $m\times n$. Wir haben 2 lineare Abb. dazu assoziert:

(1) $$T : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$$

$$T(x) := Ax$$

und

(2) $$\mathcal{U} : K^{m} \longrightarrow K^{n}$$

$$\mathcal{U}(\alpha) := \alpha A.$$

(1) Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ die standard Basen für $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$. Wir berechnen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$.

Setze $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ $\mathcal{E}' = \{\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m'\}$

Dafür berechne $[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{E}'}$. Nun ist

$$T(\varepsilon_j) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$$

und $$\begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\, \varepsilon_i' \, ,$$ also

$$[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{E}'} = j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A,$$ insbesonders

ist $$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A.$$ ∎

(2) Für (2) siehe ÜB.

Satz 2. Die Abbildung

$$\rho : L(V, W) \longrightarrow K^{m\times n}$$
$$T \longmapsto [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

ist eine Isomorphie von K-VR.

<u>Bew.</u> <u>ρ linear?</u> Berechne

$$\rho(c\,T_1 + T_2) = [c\,T_1 + T_2]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} =$$

$$\left(\underbrace{[(c\,T_1 + T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \;\Big|\; \cdots}_{j^{te} \text{ Spalte von } \rho(cT_1+T_2)} \;\Big|\; [(c\,T_1 + T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \right) = ?$$

Nun ist $[(c\,T_1 + T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = [c\,T_1(\alpha_j) + T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}$

$$= c \underbrace{[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{te} \text{ Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{te} \text{ Spalte von } \rho(T_2)}$$

$\boxed{\text{Also,}}$ j^{te} Spalte von $\rho(cT_1+T_2)$ ist gleich j^{te} Spalte von $\rho(T_2)$ plus c mal j^{te} Spalte von $\rho(T_1)$

Also: $\rho(c\,T_1 + T_2) = c\rho(T_1) + \rho(T_2)$.

<u>ρ injektiv?</u> Sei $T \in L(V, W)$ mit $\rho(T) = 0_{m \times n}$

Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall j = 1, \dots, n$

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Also T ist identisch die Nullabbildung.

<u>ρ ist surjectiv</u> folgt nun weil $mn = \dim L(V, W) = \dim K^{m \times n}$ (siehe ÜB). $\square$

Wir betrachten Sonderfall: $T: V \to V$ lin. Op. und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

Definition und Bezeichnung 2: Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix Darst. der Operators in der Basis $\mathcal{B}$.

Hier gilt also die folgende Version von ⊛

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrix Darst. von Hintereinander-Ausführungen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "U \circ T"'] & W \arrow[r, "U"] & Z \end{tikzcd}$$

Ansatz:

V, W, Z end. dim. K-VR

T, U lin. Abb.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ V Basis

$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ W Basis

$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ Z Basis.

Setze: $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$,

$$C = [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = ?$$

Satz 3 $C = BA$.

Beweis $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \underset{⊛}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \underset{⊛}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Also die Matrix BA erfüllt ⊛ bzgl $U \circ T$. Die Eindeutig. impliziert nun unsere Behauptung. ∎