Lineare Algebra

-Kuhlmann-

21. Vorlesung am

17. 01. 2012

Ansatz wie in der 20. Vorlesung: V endl. dim; $\mathcal{B}$ geord. V Basis.

Korollar 1: $\rho : L(V,V) \longrightarrow K^{n \times n}$

$$\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$$

ist ein K- Algebren Isomorphismus.

Beweis: ρ ist ein K-VR Isom.

Ferner gilt es:

$$\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2). \quad \blacksquare$$

Korollar 2 $T: V \longrightarrow V$.

Es gilt: T ist invertierbar gdw $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar.
In diesem Fall gilt ferner: $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis. T invertierbar $\Leftrightarrow \exists\, T^{-1}$ mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$

$[T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n \Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}. \quad \blacksquare$

<u>Ansatz:</u> V endl. dim $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
und $\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$ zwei geord. Basen für V.

$T \in L(V,V)$.

<u>Fragestellung:</u> Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

<u>Nun:</u> Satz 1. §.4 15. Vorlesung liefert eine invertierbare P s.d. für alle $\alpha \in V$ es gilt:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (**)$$

Und Satz 1 20. Vorlesung liefert eindeutige Matrix s.d.

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[\alpha]_{\mathcal{B}} \qquad (*)$$

Nun gilt $(**)$ für $T(\alpha) \in V$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = P\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad (***)$$

$(*) \wedge (**) \wedge (***)$ liefert:

$$[T]_{\mathcal{B}}\,P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

oder

$$\left(P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P\right)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also erfüllt diese die bestimmende matrizielle Gleichung $(*)$ bzgl der Basis $\mathcal{B}'$. Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der $(*)$ liefert nun:

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \, [T]_{\mathcal{B}} \, P.$$

wobei $P = \left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right)$

<u>Bemerkung</u>: Betrachte die Abbildung

$\pi : V \longrightarrow V$ die lineare Abb.

eindeutig definiert durch die Angaben:

$$\pi(\alpha_j) := \alpha_j' \qquad \forall \; j = 1, \ldots, n$$

Dieser Operator ist invertierbar da er eine Basis auf eine Basis abbildet (~~K~~Korollar zu Satz 3 S. 4 19. Vorlesung). So die Matrix Darstellung $[\pi]_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar. Es ist

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \left([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \right) =$$

$$\left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right) = P.$$

P heißt deshalb "Matrix der Basiswechsel".

Wir haben bewiesen:

Satz 1: (Ansatz wie Oben)

$$\boxed{\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}'} &= [\Pi]_{\mathcal{B}}^{-1}\ [T]_{\mathcal{B}}\ [\Pi]_{\mathcal{B}} \quad \text{oder} \\ [T]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1}\ [T]_{\mathcal{B}}\ P\end{aligned}}$$

Definition 1. Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Wir sagen B ist zu A ähnlich falls es eine invertierbare $P \in K^{n\times n}$ gibt so daß:

$$B = P^{-1} A P .$$

Wir haben in Satz 1 bewiesen:

Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix Darst. des Operators T bzgl der Basen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$, dann ~~sind~~ ist B zu A ähnlich. Eigentlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 2: B ist ähnlich zu A gdw B und A denselben lin Operator (bezgl. geeignete Basen) darstellen.

Beweis "$\Leftarrow$" bereits gemacht. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis.
"$\Rightarrow$" Sei T der eindeutig definierte Operator

durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = A \;, \text{ d.h } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}} := A[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

Sei $\mathcal{B}'$ die Basis erhalten von P, d.h wofür

$$P = \left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right) \quad \underline{\underline{\text{sein sollte}}}$$

diese Angabe bestimmt also daß:

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{d. h}$$

$$\alpha_j' := \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, \alpha_i$$

Beh. Es gilt: $[T]_{\mathcal{B}'} = B.$ ÜA. (siehe ÜB). ■

Exkurs: <u>Definition</u>: sei eine Relation $R \subseteq S \times S$.
Schreibe $x R y \iff (x,y) \in R$.

R heißt Äquivalenzrelation falls:
(1) $xRx \quad \forall x \in S$ (Reflexiv)
(2) $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x,y \in S$ (Symmetrie)
(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x,y,z \in S$ (Transitiv).

<u>Beispiel:</u> B ähnlich A ist eine Äquiv. Rel auf $K^{n\times n}$:

(1) $B = I_n^{-1} B I_n$ ✓

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1} B (P^{-1})$
setze $Q := P^{-1}$ also: $A = Q^{-1} B Q$ ✓

(3) $\left.\begin{array}{l} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{array}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1} A (PQ)$. ■

 17.01.2012 Mehr dazu im ÜB...