- Lineare Algebra -

~ Kuhlmann ~

~ 22. Vorlesung ~
am
20. 01. 2012.

---

§3.5 Lineare Funktionale.

__Bemerkung 1__ $W = K^1$ ist ein K-VR.

$\dim(W) = 1$. Standard Basis ist $\{1\}$.

$W' \subseteq V$ Unterraum $\Rightarrow$ $W' = \{0\}$ oder $W' = V$

also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$. Und

$\dim W' = 1$ gdw $W' \neq \{0\}$.

__Definition 1.__ $f \in L(V, K)$ heißt __linear Funktional__.

__Beispiel 1__ $V = K^n$ $\quad \mathcal{E}$ Standard Basis.

Sei $(a_1, .., a_n) \in V$ fixiert. Definiere

$$f : V \longrightarrow K \text{ durch } f(x_1, .., x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad (*)$$

Es gilt: $f \in L(V,K)$ und $[f]_{\mathcal{E}, \{1\}} = [a_1 \ldots a_n]$.

Umgekehrt sei $f \in L(V,K)$ setze $a_j := f(\varepsilon_j)$, dann erfüllt

---

f ⊛ für $(a_1, .., a_n)$. ∎

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ Basis

$\dim V = n$ $\mathcal{B}$ geord Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$

Sei $(a_1, .., a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f: V \to K$ durch

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \qquad ⊛$$

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B}, \{1\}}' =$

$$\left[[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \middle| \cdots \middle| [f(\alpha_n)]_{\{1\}} \right] = \left([a_1]_{\{1\}} \middle| \cdots \middle| [a_n]_{\{1\}} \right)$$

$= [a_1 \dots a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze

$a_i = f(\alpha_i)$ dann ist f wie in ⊛. ∎

<u>Beispiel 2.</u> $V = K^{n \times n}$

$$\mathrm{tr}: V \to K$$

$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ ist ein linear Funktional.

<u>Beispiel 3.</u> $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $V = C([a,b]) := \{ g : [a,b] \to \mathbb{R} ;\ g \text{ stetig} \}$

Setze $f(g) := \int_a^b g(t)\,dt$ für $g \in V$.

$f \in L(V, \mathbb{R})$. ∎

<u>Definition und Notation 2.</u> $V^* = L(V, K)$

heißt der <u>Dualraum</u>. Sei nun $\dim V = n$

<u>Bemerkung 2</u> $\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ für V werden wir nun eine Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* zuordnen.

Satz 1 §.2 17. Vorlesung liefert für $i = 1, \ldots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}.$$

<u>Beh.</u> $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis für V^*.

Es genügt z.z. sie sind l.u.

<u>Bew</u> für $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ $(c_i \in K)$ gilt

$\forall\ j = 1, \ldots, n$

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \qquad (**)$$

Insbesondere ist $f = 0$ dann gilt $f(\alpha_j) = 0 \ \forall j$
d.h. $c_j = 0 \ \forall j$. ∎

Definition 3: $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt **Dualbasis** zu $\mathcal{B}$.

Satz 1. Sei $\dim V = n$ $\quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V

Es gilt: $\exists!$ (Dual)Basis $\mathcal{B}^*$ für V^* mit $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \qquad (1)$$

und $\forall f \in V^*$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \qquad (2)$$

und $\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha) \alpha_j \qquad (3)$$

Dualität: d.h. $[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix}$

$\forall f \in V^*$ und $\forall \alpha \in V$

Bew.: (1) ✓

(2) $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$ und $(*)$ liefert

$c_j = f(\alpha_j) \qquad \forall j = 1, \dots, n$

(3) Analog: $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j\left(\sum x_i \alpha_i\right) = x_j$. ∎

Bemerkung 3. (3) beschreibt f_i als die "ite Koordinaten Funktion bezüglich der Basis $\mathcal{B}$"

$$f_i : V \longrightarrow K$$
$$\alpha \longmapsto \text{die ite Koordinate in } [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Bemerkung 4. $f \in V^*$, $f \neq 0$ $Im(f) \subseteq K$ Unterraum, $Im(f) \neq \{0\}$ also (Bem. 1) ist $Im(f) = K$

$\Rightarrow \dim(Im f) = R_T = 1$. Dimensionssatz impliziert nun

$\dim \ker(f) + 1 = n \Rightarrow \dim \ker(f) = n-1$

(wobei $n := \dim V$).

Definition 4 Sei $\dim(V) = n$ und $W \subseteq V$ Unterraum mit $\dim W = n-1$, dann heißt W Hyperraum (oder Hyperebene, oder Unterraum der Kodimension 1).

Bem. 4 besagt: $f \in V^*$; $f \neq 0 \Rightarrow \ker(f) \subseteq V$ ist ein Hyperraum. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.