# - Lineare Algebra -

## - Kuhlmann -

## 23. Vorlesung

24. 01. 2012.

---

**Definition 1.** Sei $V$ $k$ VR, $S \subseteq V$
Annihilator $S$ ist bezeichnet mit $S^0$
und definiert als:
$$S^0 := \{ f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f) \}$$
$$= \{ f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \ \ \forall \alpha \in S \}.$$

**Bemerkungen.** (i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^{\,0} \subseteq S_1^{\,0}$ Klar.

(ii) $S^0 = (\operatorname{span}(S))^0$ klar

(iii) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum. klar

(iv) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$

(V) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$ klar.

(VI) also $\operatorname{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$.

**Beweis von (iv)** "$\Rightarrow$" ist Klar.

Für "$\Leftarrow$": Sei $S^0 = V^*$ z.z. $S = \{0\}$

---

Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$, $\alpha \in S$.
$\{\alpha\}$ l. u $\Rightarrow$ ergänze zu einer Basis für $V$:

$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^*$ Dualbasis.
$\mathcal{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$.
Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$ also $f_1 \notin S^0$. $\lightning$. $\square$

Beweis von (VI). "$\Rightarrow$" schon gemacht.

"$\Leftarrow$" Sei $S^0 = \{0\}$. Z.Z. $\mathrm{Span}(S) = V$.

Zum Widerspruch setze $W := \mathrm{span}(S)$ und sei
$\alpha \in V \setminus W$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq W$ basis für $W$.

Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ lin. unab.

Ergänze zu eine Basis für $V$:

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n\}$.

Sei $\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ Dualbasis.

Es gilt: $f_{k+1}(\alpha_j) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k$
$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$

Also $f_{k+1} \neq 0$ und $f_{k+1} \in S^0$. $\lightning$ $\square$

**Korollar 1.** (Trennung Eigenschaft) Sei $W \subseteq V$ Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert $f \in V^*$ mit

$$f(W) = \{0\} \quad \text{und} \quad f(\alpha) \neq 0$$

**Beweis** Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für $W$. Nun $\alpha \notin \operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \Rightarrow$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ lin. unab.

Ergänze zu einer Basis für $V$:

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \ \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$

und sei

$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ Dualbasis.

Setze $f := f_{k+1}$. ∎

---

**Satz 1** (Dimension Formel für Annihilatoren).

Sei $V$ endl. dim. VR / $K$.
$W \subseteq V$ Unterraum.

Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

**Beweis** Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ Basis für $W$
Ergänze zu eine Basis für $V$:
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

Dualbasis.

**Beh.** $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für $W^0$.

**Bew** Es ist klar dass $f_i \in W^0$ für $i \geq k+1$

weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$ falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$

also $\alpha \in W \Rightarrow \alpha$ lin. Komb. von $\alpha_1, \dots, \alpha_k \Rightarrow$

$$f_i(\alpha) = 0 \qquad \forall\ i \geq k+1$$

also $f_i \in W^0$ für $i \geq k+1$, wie behauptet. $\square$

Nun $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ sind l. unab. (Teil einer Basis)

also es genügt z. z. $\operatorname{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$.

Sei $f \in V^*$, es gilt $f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\, f_i$ (allgemein)

Ist aber $f \in W^0$ dann $f(\alpha_i) = 0$ für $i \leq k$

also $$f = \sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i)\, f_i \qquad \blacksquare$$

---

**Korollar 2** Sei $\dim W = k$, $\dim V = n$, $W \subseteq V$ Unterraum
Es gilt: $W$ ist der Durchschnitt von $(n-k)$ Hyperebenen in $V$.

**Beweis:** In der Notation des obigen Beweises: $W = \bigcap_{i=k+1}^{n} \ker(f_i)$. $\blacksquare$

**Bemerkung:** ist $W$ Hyperebene ; $\dim W = n-1$

also ist $W = \ker(f_n)$ wie versprochen !

**Korollar 3.** $W_1$, $W_2$ Unterraüme von $V$.

Es gelt : $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$ .

**Beweis:** Zum Widerspruch Sei $W_1 \neq W_2$ ; $\alpha \in W_2$
$\alpha \notin W_1$. Korollar 1 $\Rightarrow \exists f \in V^*$

$f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$

Also $f \in W_1^0$ aber $f \notin W_2^0$. $\lightning$. $\boxminus$

---