Lineare Algebra

Kuhlmann

24. Vorlesung

Am 27. 01. 2012.

Beobachtung: **Beziehung zu Homogene Gleichungs Systeme.**

Sei

$$(*)\quad \begin{cases} A_{11} x_1 + \dots + A_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1} x_1 + \dots + A_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

HGS mit Koeffi. in körper K.

Definiere für $i = 1, \dots, m$ ein Funktional auf K^n.

$$f_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot x_j$$

Es gilt: Lösungsraum von $(*)$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$$

(folgt unmittelbar aus den Definitionen).
Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

__Beispiel 1.__

$V = \mathbb{R}^5$ $\quad W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ wobei

$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$
$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$
$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$
$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$

Finde W^0.

Sei $f \in V^*$ es gilt $f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$ allgemein.

__Insbesondere:__

$f \in S^0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \dots = f(\alpha_4) = 0$ (HGS) (in $c_1, \dots, c_5$)

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{5} A_{ij} c_j = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq 4$$

wobei A_{ij} die Koeffiz. der Koeff. Matrix A

des (HGS) i.e

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \text{(GEV)} \Rightarrow$$

v. 7. 8. F :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array}$$

c_1 , c_3, c_5 Hauptvariabl.

c_2 , c_4 Freiè Variabl.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij} \, c_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq 3$$

i.è

$$c_1 - c_2 - c_4 = 0$$
$$c_3 + 2c_4 = 0$$
$$c_5 = 0$$

Setze $c_2 = a$; $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$ dann sind

$c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$, $c_5 = 0$ und

$W^0 = \{ f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + a x_2 - 2b x_3 + b x_4,$
$a, b \in \mathbb{R} \}$

Dim $W^0 = 2$

Basis für W_0 erhält man z. B durch Einsetzen

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \quad b = 0 \text{ und} \\ a = 0 \quad b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array}\right\} \text{ ist Basis für } W^0$$

Kapitel 3 § 6 BiDual. Sei V endl. dim VR / K.

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

(1) $V \longrightarrow V^*$

$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$

Umkehrung? Sei $\mathbb{B}$ Basis für V^*, $\exists\ \mathcal{B}$ Basis für V so daß $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

(2) $V \longrightarrow V^*$

$W \longmapsto W^0$

Umkehrung? Sei $\mathcal{U}$ Unterraum von V^*, $\exists\ W$ Unterraum von V so daß $\mathcal{U} = W^0$?

Schlüßel: Wir betrachten $(V^*)^* := V^{**}$

Bemerkung: $\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Terminologie: Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt

Definition der Bidualraum zu V.

Proposition 1. Sei $\alpha \in V$, α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \qquad \text{für } f \in V^*.$$

Beweis $L_\alpha(cf + g) = (cf+g)(\alpha) = c f(\alpha) + g(\alpha) = c L_\alpha(f) + L_\alpha(g)$. ∎

Satz 1 Die Abbildung

$$\lambda : V \longrightarrow V^{**}$$
$$\alpha \longmapsto L_\alpha$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: $\lambda(c\alpha+\beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$? z.z ist also
$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f) \quad \forall f \in V^*$.
Wir berechnen:

$$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = L_{c\alpha+\beta}(f) = f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha)+f(\beta)$$

$$= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) =$$

$$[c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f).$$

Also ist λ linear. Wir zeigen λ ist bijektiv.

Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$

Zu beweisen: λ ist regulär.

Sei $\left\{\begin{array}{l} \lambda(\alpha) = 0 \\ \text{i.e } L_\alpha \equiv 0 \end{array}\right\}$ z.z $\alpha = 0$. Zum Widerspruch

$\alpha \neq 0$; also $\{\alpha\}$ lin. unab. Sei $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Basis für V, $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ Dualbasis. Es gilt
$f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$, also $L_\alpha(f_1) \neq 0$ also $L_\alpha \not\equiv 0$ ↯ ∎