– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

25. Vorlesung
am
31. 01. 2012

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

Korollar 1. Sei L lin. Funkt. auf V^*.
$\exists!\ \alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$, i.e

$$(**) \qquad L(f) = f(\alpha) \qquad \forall f \in V^*$$

Beweis. setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$. ◻

Korollar 2 Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für V^*. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$

Beweis Setze $\mathbb{B} := \{f_1, \dots, f_n\}$. Satz 1 (1) S. 4 22. Vorlesung liefert eine Basis Dual zu $\mathbb{B}$:
$\mathbb{B}^* := \{L_1, \dots, L_n\}$ für $(V^*)^* = V^{**}$ s.d

$$L_i(f_j) = \delta_{ij}$$

Korollar 1 liefert: $\forall i\ \exists!\ \alpha_i \in V$ mit $(**)$ i.e

$$L_i(f) = f(\alpha_i) \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n \ ; \ f \in V^*$$

Insbesondere : $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ $\quad 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
Setze nun $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. ◻

Bemerkung: Sei $E \subseteq V^*$ dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$

$$E^0 = \{ L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \quad \forall f \in E \}$$

Wir berechnen

$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \forall f \in E \} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in E \} \end{cases} \quad (+)$$

Satz 2. Sei $W \underset{\text{unter.}}{\subseteq} V$. Es gilt: $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$

Beweis
$$\left.\begin{aligned} &\dim W + \dim W^0 = \dim V \\ &= \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00}).$$

Es genügt nun z.z.:

$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) \underset{(+)}{=} \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in W^0 \}$$

aber $\alpha \in W \Rightarrow f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in W^0$ per Definition! ∎

Korollar 3 Sei $U \underset{\text{unter.}}{\subseteq} V^*$. Setze $W := \lambda^{-1}(U_0)$.

Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis $\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$

also $\dim U = \dim W^0$ [weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$].

Es genügt z.z. $U \subseteq W^0$

$$W \underset{(t)}{=} \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

Sei $f \in U$, es gilt $f(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in W$

also $f \in W^0$ per Definition. $\boxtimes$

§ 7 Kapitel 3. Die Transponierte Abbildung.

Ansatz wie immer.

Sei $T : V \longrightarrow W$ lin. Tranf.

T induziert eine Abbildung $T^t : W^* \longrightarrow V^*$

definiert durch

$$V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T \quad \text{für } g \in W^*.$$

d.h $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) \quad \forall \alpha \in V.$

Beh: T^t ist linear: $c \in K$; $g_1, g_2 \in W^*$

$$T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T)$$
$$= c\, T^t(g_1) + T^t(g_2). \quad \boxtimes$$

wir haben bewiesen:

Satz 3 Sei V, W (endl. dim) $VR \mid K$.
Für jede lin. Ab. $T : V \to W$ $\exists!$ $T^t : W^* \to V^*$ auch linear so daß:

$$T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) \quad \forall g \in W^*, \alpha \in V. \quad \boxtimes$$