Definition T^t ist die transponierte Abbildung zu T.

— 26. Vorlesung am 7.2.2012 —

— DR. Merlin Carl in Vertretung —

Satz 1 Es gelten:

(0) $\ker(T^t) = (R_T)^0$

(Nullraum der transponierte T^t = Annihilator von Bild T)

(1) $\text{Rang}(T^t) = \text{Rang}(T)$

(2) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$

(Bild der transponierte T^t = Annihilator von Nullraum von T).

Beweis (0) $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0$

$\Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0 \quad \forall \alpha \in V \Longleftrightarrow g \in (R_T)^0$ $\square$

(1) Setze $\dim V = n \qquad \dim W = m$

$r := \text{Rang}(T) := \dim R_T$

Satz 1 S.3 23. Vorlesung impliziert:

$$\dim(R_T) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m$$

Also $r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r$

~~1.~~ ~~31.~~ 01.2012

Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$.

Nun ist $T^t : W^* \to V^*$; und

Satz 1 S.1 18. Vorlesung liefert:

$$\text{Rang}(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m.$$

Also $\text{Rang}(T^t) = m - (m-r) = r$. $\blacksquare$

(2) Setze $N := \ker(T)$.

<u>Beh:</u> $R_{T^t} \subseteq N^0$!

<u>Bew:</u> Sei $f \in R_{T^t}$; also $f = T^t(g)$

$f \in V^*$ für ein $g \in W^*$.

Sei $\alpha \in N$ und berechne:

$$f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0. \blacksquare$$

Andererseits haben wir wieder:

$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{Rang}(T) \underset{(1)}{=} \text{Rang}(T^t).$$

D.h: $R_{T^t} \subseteq N^0$ und

$\dim R_{T^t} = \dim N^0$. Also $R_{T^t} = N^0$. $\blacksquare$

<u>Satz 2.</u> Seien V, W endl. dim VR $/ K$.

$T : V \to W$; $T^t : W^* \to V^*$

lineare Ab.

Seien $\mathcal{B}$ geord. Basis für V und $\mathcal{B}^*$ Dualbasis

$\mathcal{B}'$ geord. " " W bzw. $(\mathcal{B}')^*$ "

Es gilt:

$$[T]^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*, \mathcal{B}^*}$$

<u>Beweis</u> <u>Erinnerung</u>: Sei A $m \times n$ Matrix, dann ist

A^t $n \times m$ und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$

<u>Setze</u>: $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ $\mathcal{B}' = \{\beta_1, .., \beta_m\}$

$\mathcal{B}^* = \{f_1, .., f_n\}$ $(\mathcal{B}')^* = \{g_1, .., g_m\}$.

Per Definition gilt:

$$(*) \quad T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \qquad j = 1, .., n$$

$$(**) \quad T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \qquad j = 1, \dots, m$$

Wir berechnen nun

$$[(T^t)(g_j)](\alpha_i) \overset{\text{Def}}{=} g_j(T(\alpha_i))$$

$$\overset{(*)}{=} g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_i\right) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\, g_j(\beta_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\,\delta_{jk} \underset{(***)}{=} A_{ji}.$$

Nun für beliebiges $f \in V^*$;

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\, f_i \quad (\text{Darstellung zur Basis } \mathcal{B}^*)$$

Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \underset{(**)}{=} T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} T^t g_j(\alpha_i)\, f_i \underset{(***)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} f_i.$$

Da $\mathcal{B}^*$ eine Basis, ist die Darstellung jeder f eindeutig, also $B_{ij} = A_{ji}$ wie behauptet. ∎

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist:

Erinnerung (i) $Sr(A)$: Spaltenrang von A = Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(ii) $Zr(A)$ = Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.
= Zeilenrang von A

Satz 3. K Körper, $A \in Mat_{m \times n}(K)$.

Dann ist $Zr(A) = Sr(A)$.

Beweis Es sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für K^n;
$\mathcal{E}_m$ " " " K^m

$$T : K^n \longrightarrow K^m$$

gegeben durch

$$T((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m) \quad \text{wobei } y_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Es ist: $[T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$. (üA).

Offenbar ist $Sr(A) = \text{Rang}(T)$,

denn $\text{Bild}(T)$ besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A.

Außerdem ist $Zr(A) = Sr(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t. Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:

$$Sr(A) = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t) =$$

$$Sr(A^t) = Zr(A), \quad \text{da } A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*, \mathcal{E}_n^*} \quad \blacksquare$$

Definition: $\text{Rang}(A) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$

---

§ Quotientenräume.

Es sei V ein K VR; $W \subseteq V$ Unterraum.

Definition (Kongruenz): für $\alpha, \beta \in V$: $\alpha \equiv \beta \mod W$

(α kongruent zu β modulo W) falls

$\alpha - \beta \in W$.

Lemma: $\equiv \bmod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Bew.: (1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch:
$\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha-\beta) = \beta - \alpha \in W$.

(3) Transitiv: sind $\left.\begin{matrix}\alpha - \beta \in W \\ \beta - \gamma \in W\end{matrix}\right\}$ so auch

$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. $\blacksquare$

Definition: Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \bmod W\}$$

die Restklasse von $\alpha \bmod W$.

$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen

Restklassen von W. **Notation:** $V/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$

Bemerkung Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$.

Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch

$\alpha + W$ schreiben. Also ist
$V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$. $\blacksquare$
