Lineare Algebra. 5. Vorlesung. 4/11/11

Definition 1. (i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> mit m Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S) \quad \left.\begin{array}{ccccccc} a_{11} & x_1 & + \cdots + & a_{1n} & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + \cdots + & a_{2n} & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + \cdots + & a_{mn} & = & b_m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_2 = b_2 \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}$$

(ii) Eine <u>Lösung für (S)</u> ist $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ein n-Tuple ~~so~~ daß:

$\underline{x}$ ist eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S).

<u>Notation:</u> $\mathcal{L}(S) := \{ \underline{x} \in K^n ; \ \underline{x} \text{ ist Lösung} \}$

$\mathcal{L}(S)$: die Lösungsmenge.

1. $\boxed{\text{Ziel}}$: Finde und beschreibe $\mathcal{L}(S)$.

(iii) (S) ist <u>homogen</u> falls $b_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$.

(iv) (S) ist <u>konsistent</u> falls $\mathcal{L}(S) \neq \emptyset$

(S) ist ansonsten <u>inkonsistent</u> $(\mathcal{L}(S) = \emptyset)$.

(v) (S) homogen $\Rightarrow$ $\underline{x} = \underline{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathcal{L}(S)$

(die <u>triviale Lösung</u>). Also insbesonders

(S) homogen $\Rightarrow$ (S) konsistent.

(vi) <u>Beispiel!</u> 3 Gl. in 3 Var. über $\mathbb{R}$

$$(S_1) \quad \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

Elementare Gleichung Umformung

(TYP1) Vertauschen der ersten mit der dritten Gl. ergibt

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad &= 4 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(TYP3) Addition des (-2)-fachen der ersten Gl. zur zweiten:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(TYP2) Multiplikation der zweiten und der dritten Gl. mit 1/2 ergibt schliesslich:

$$(S_2)\quad \begin{cases} x_1 & = 1 \\ \quad x_2 & = 1 \\ \quad\quad x_3 & = 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1,1,3)$ eine Lösung (prüfe durch Einsetzen) $\square$

Ist $\mathcal{L} = \{(1,1,3)\}$; die Frage ist ob man durch obige Gl. Umformungen keine Lösungen verloren hat!

Wir wollen zeigen daß die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen die nun.

TYP I: Vertauschen

$$(S_1)\quad \left.\begin{array}{c} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \updownarrow \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Typ I}} \left\{\begin{array}{c} \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (S_2)$$

Bemerkung I (1) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ I}} (S_1)$

(2) $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 2 : multipl. eine Gl. mit $\lambda \in K^\times$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Typ 2}} \left.\begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ \lambda G_i = \lambda b_i \\ \vdots \\ G_m \end{array}\right\} (S_2)$$

Bemerkung II (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 2}} (S_1)$

(mult. durch λ^{-1})

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$

(folgt aus Körperaxiome), also:

$\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2).

Typ 3 : $i \neq j$; $\lambda \in K$

addiere des λ-fachen der iten Gl. zur jten Gl.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Typ 3}} \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ \lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}$$

Bemerkung III (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ } 3} (S_1)$

(addiere $(-\lambda)$-fach. der i^{ten} Gl zur j^{ten}).

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$

und $+ \quad G_j = b_j$ addiere

also

(Körperaxiome) $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$

Also $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2).

Definition 2: (S_2) ist äquivalent zu (S_1) falls man (S_2) aus (S_1) erhält durch endlich vielen elementaren Gleichungumfor.

Bemerkung IV: Durch Bemk. $I^{(i)}, II^{(i)}, III^{(i)}$ bekommt man sofort: (S_2) äquivalent $(S_1) \Rightarrow$

(S_1) " (S_2)

Also sagen wir: (S_1) und (S_2) sind äquivalent.

Satz 1: Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmengen.

Beweis: Aus Bemk. I (ii), Bemk. II (ii), Bemk III (ii) haben wir:

$$\mathcal{L}(S_1) \subseteq \mathcal{L}(S_2).$$

Aus Bemk I (i), Bemk. II (i), Bemk. III (i) bekommt man nun umgekehrt

$$\mathcal{L}(S_2) \subseteq \mathcal{L}(S_1).$$

Also $\mathcal{L}(S_1) = \mathcal{L}(S_2)$. ∎

Bemerkung: Wir werden die Umkehrung vom Satz später studieren!

Also wollen wir die Gl. Umf. um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

Kapitel 1 § 3 Matrizen.

Definition 3 (i) Eine $m \times n$ Matrix über K
$m, n \in \mathbb{N}$ ist eine Familie in K der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

wobei $a_{ij} \in K \quad \forall i, j$.

Darstellung:

$S_j := j^{te}$ Spalte

m Zeilen

$R_i := i^{te}$ Reihe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n Spalten.

(ii) die Koeffizienten matrix zum System (S) ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} ;$$ und die

erweiterte Koeffizienten matrix ist

$$(A, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matrix Darstellung von (S) ist:

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

wobei $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (eine $n \times 1$ Matrix mit Variablen als Koeffizienten)

und $\underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (eine $m \times 1$ Matrix über K).

(iii) Die <u>elementare Zeilenumformungen</u> von Typ 1, Typ 2, Typ 3 entsprechen genau die elementare Gleichungumform.

(iv) Seien A, B $m \times n$ Matrizen.

matrix analog von Definition 2 für Systeme

A und B sind <u>Zeilenäquivalent</u> falls man B aus A durch endlich vielen Zeilenumf. erhält (und/oder umgekehrt).

Satz 2 (Matrixanalog von Satz 1)

Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

Definition 4 Eine m x n Matrix A ist in reduzierte Zeilenform (Abkürzung: r. Z. F) falls:

Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Reihe der Matrix heißt "Nullreihe" falls alle Koeffiz. die darin vorkommen gleich Null sind.

(a) der erste Koeffizient $\neq 0$ in einer Reihe $R_i \not\equiv 0$ ist 1

(dieser erste verschieden von Null Koeffizient heißt Hauptkoeffizient, bzw. Haupteins.)

(b) jede Spalte von A wo sich eine Haupteins befindet hat alle andere Koeffizienten gleich Null.

Beispiel 1 (Matrix Form): Erweiterte Matrix von (S_1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ <u>nicht</u> in r.Z.F

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$