6. Vorlesung 08/11/11

<u>Beispiel 1</u> (i) Die Identitäts (quadratische) Matrix I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

I_n ist in r.Z.F $\longrightarrow$ $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind <u>nicht</u> in r.Z.F

(iii) die $0^{m \times n}$ Matrix $\left(a_{ij} = 0 \quad \forall \, i = 1, \dots, m \atop j = 1, \dots, n \right)$

ist in r.Z.F.

Definition 1 Eine $m \times n$ Matrix A ist in (r. Z. S. F)

(reduzierten) Zeilenstufen Form falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a)

$\Big\}$ Axiome für r. Z. F und

(b)

(c) jede identisch Null Zeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht identisch Null Zeile

(d) Seien $Z_1, \ldots, Z_r$ die nicht identisch Null Zeilen ($r \leq m$)
und k_i die Spalte wo die Haupteins der $i$ten Zeilen erscheint ($i = 1, \ldots, r$).

Dann gilt: $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Satz 1: jede $m \times n$ Matrix A ist zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r. Z. S. F

Beweis: gleich ..., siehe Seite 4

Zweck: Aus der r. Z. S. F kann man

$\mathcal{L}(S)$ sofort ablesen:

Beispiel 2: Über $\mathbb{Q}$: Erweiterte Koeff. M:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -1 \end{array}$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow$ inkonsistent.

(iii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

x_1, x_2, x_3 Hauptvariablen

x_4 freie Variable.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 4x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 6 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{array}$$

$x_4 = q \in \mathbb{Q}$ also

$$\mathcal{L}(S) = \{(-1-4q,\ 6-2q,\ 2-3q,\ q) \in \mathbb{Q}^4;\ q \in \mathbb{Q}\}.$$

<u>Beweis von Satz 1</u>: Fall $A = O^{m \times n}$ dann ist A bereits in r. Z. S. F. Ansonsten:

Typ1 Bei wiederholten Anwendung von TYP 1 können wir OE annehmen daß die Zeilen

$Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ nicht Null sind $(r \leq m)$

und $Z_{r+1}, \dots, Z_m$ Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!)

- Wir betrachten Z_1:
  Sei $0 \neq a_{1k_1}$ Hauptkoeffizient $(1 \leq k_1 \leq n)$

Typ2 • multipliziere Z_1 durch $a_{1k_1}^{-1}$; und

~~dann~~ für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ3 • addiere $(-a_{ik_1})$-fach von (~~der~~ neue erhaltene Zeile) Z_1

zur i^{te}-Zeile:

$$\begin{array}{cc} & \text{Spalte } k_1 \\ \begin{array}{c} Z_1 \\ \\ \\ \\ Z_r \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots\cdots * \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ - - - & & - - - - - \\ 0 - - & \vdots & - - - 0 \\ 0 - & 0 & - - - 0 \end{pmatrix} \end{array} := A_1$$

Nun betrachte z_2 der Matrix A_1. Wieder

Typ 1 ~~OE~~ $z_2 \neq 0$

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient

von z_2. **Bemerke:** $k_2 \neq k_1$!

Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & a_{2k_2} \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \quad \begin{matrix}(\text{Fall } 1) \\ (k_2 < k_1)\end{matrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots & 0 & 1 & * \cdots * \cdots * \\ 0 \cdots & 0 & 0 & \cdots a_{2k_2} \cdots * \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \end{pmatrix} = A_1 \quad \begin{matrix}(\text{Fall } 2) \\ (k_1 < k_2)\end{matrix}$$

Typ 2 • Wiederhole: multipliziere z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$.

Dann

Typ 3 • Im Fall 1 $(k_2 < k_1)$: addiere

$(-a_{ik_2})$-Fach von z_2 zur i-ten Zeile

für $3 \leq i \leq m$

Im Fall 2 $(k_1 < k_2)$

Typ3 addiere $(-a_{ik_2})$ - fach von Z_2 zur

i^{ten} Zeile (für $i = 1$ und $3 \le i \le m$). ■

Achtung: wichtig ist es zu bemerken, daß wir

die koeffizienten

$a_{1j} = 0 \qquad j = 1, \dots, k_1 - 1$ und

$a_{1k_1} = 1$ und

$a_{ik_1} = 0 \qquad i = 2, \dots, m$

von A_1 in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$

(also aufjedenfall) nicht geändert

haben!

Per Induktion wiederholen wir diese

Prozedur für $i = 3, \dots, r$.

Wir erhalten eine Matrix A_r

die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich

Typ I bei wiederholten Anwendung von Typ I erhalten wir eine Matrix B die auch (d) genügt~~t~~, also B ist in r.Z.S.F. ∎